

Logique : TD n°4

Luc Chabassier
chabassier@lsv.fr
Amélie Ledein
ledein@lsv.fr

09/10 février 2022

1 Démontrabilité et non démontrabilité

Exercice 1 : Démontrer la non-démontrabilité

Soit un langage \mathcal{L} contenant un symbole de fonction 0-aire c et un prédicat unaire P .

1. Est-ce que $P(c)$ est valide dans tout modèle de \mathcal{L} ?
2. Est-ce que $\neg P(c)$ est valide dans tout modèle de \mathcal{L} ?
3. Est-ce que $P(c) \vee \neg P(c)$ est valide dans tout modèle de \mathcal{L} ?

Exercice 2 : x2A

Les propositions suivantes sont-elles démontrables ? Donnez une dérivation, une preuve de validité sémantique, ou un contre-modèle.

1. $\vdash (P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$
2. $\vdash ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$
3. $\vdash \exists x \exists y \top$
4. $\vdash \exists x \forall y (T(x) \Rightarrow T(y))$
5. $\vdash \forall x (T(x) \Rightarrow R(x)) \vdash (\forall x T(x) \Rightarrow \forall x R(x))$
6. $\vdash \exists x (T(x) \Rightarrow R(x)) \vdash (\forall x T(x) \Rightarrow \exists x R(x))$

Exercice 3 : Règle admissible, 2.0

Prouver que la règle d'affaiblissement est admissible.

2 It's just a theory; an equality theory.

Rappel : théorie de l'égalité

La théorie de l'égalité sur un langage L ayant une sorte de termes s , un ensemble de symboles de fonctions \mathcal{F} et un ensemble de symboles de prédicats \mathcal{P} contenant un prédicat = d'arité $\langle s, s, Prop \rangle$ est définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x (x = x) \\ \forall x_1 \dots \forall x_i \forall x'_i \dots \forall x_n \quad (x_i = x'_i \Rightarrow \\ \quad f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n)) \\ \forall x_1 \dots \forall x_j \forall x'_j \dots \forall x_m \quad (x_j = x'_j \Rightarrow \\ \quad P(x_1, \dots, x_j, \dots, x_m) \Rightarrow P(x_1, \dots, x'_j, \dots, x_m)) \end{array} \right.$$

pour tout symbole de fonction n -aire $f \in \mathcal{F}$ et symbole de prédicat m -aire $P \in \mathcal{P}$.

Exercice 4 : Théorie de l'égalité

1. Soit \mathcal{M} un modèle de la théorie de l'égalité. On note \sim la relation binaire \mathcal{M}_s définie par :

$$x \sim y \quad \text{iff} \quad (x, y) \in =_{\mathcal{M}}$$

2. En notant que la symétrie, réflexivité, et transitivité sont démontrables dans la théorie de l'égalité (cf TD3), montrez que \sim est une relation d'équivalence.
 - (a) Prouvez que l'on peut définir un "modèle quotient", c'à-d un modèle \mathcal{M}/\sim tel que pour toute formule A et valuation σ :

$$\mathcal{M}, \sigma \models \phi \quad \text{iff} \quad \mathcal{M}/\sim, [\sigma] \models A$$

où $[\sigma](x) = [\sigma(x)]$, i.e. la classe d'équivalence de $\sigma(x)$ pour la relation \sim .

- (b) Montrez que dans ce modèle quotient, l'égalité est interprétée comme l'égalité mathématique. On appelle un tel modèle un *modèle égalitaire*.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrire une formule A_n telle que pour tout modèle égalitaire \mathcal{M} de A_n , $|\mathcal{M}_s| = n$.

3 Arithmétique

On se place sur le langage de l'arithmétique de Peano.

Rappel : l'arithmétique de Peano

Les axiomes de PA sont les axiomes de l'égalité et :

$$\forall x \quad 0 + x = x \quad (1)$$

$$\forall x \forall y \quad s(x) + y = s(x + y) \quad (2)$$

$$\forall x \quad 0 \times x = 0 \quad (3)$$

$$\forall x \forall y \quad s(x) \times y = (x \times y) + y \quad (4)$$

$$\forall x \exists y \quad x = 0 \vee x = s(y) \quad (5)$$

$$\forall x \quad \neg s(x) = 0 \quad (6)$$

$$\forall x \forall y \quad s(x) = s(y) \Rightarrow x = y \quad (7)$$

Induction scheme (for every A with free variables included in x, x_1, \dots, x_n):

$$\forall x_1 \dots \forall x_n A\{x \rightarrow 0\} \Rightarrow \forall y. (A\{x \rightarrow y\} \Rightarrow A\{x \rightarrow s(y)\}) \Rightarrow \forall y. A\{x \rightarrow y\}$$

Exercice 5 : Addition

Soit \mathcal{M}_1 le modèle défini par $\mathcal{M}_{1_{nat}} = \mathbb{N}$, munie de

- $0_{\mathcal{M}_1}$ l'entier naturel 0,
- la fonction $s_{\mathcal{M}_1}$ du successeur sur \mathbb{N} ,
- la fonction $+_{\mathcal{M}_1}$ de l'addition sur \mathbb{N} ,
- la fonction $\times_{\mathcal{M}_1}$ de la multiplication sur \mathbb{N} ,
- la relation binaire $=_{\mathcal{M}_1}$ de l'égalité sur \mathbb{N} – pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $(n, p) \in =_{\mathcal{M}_1}$ si et seulement si $n = p$.

1. \mathcal{M}_1 est-il un modèle de PA ?
2. \mathcal{M}_1 est-il un modèle des formules $\forall x \forall y \exists z (x + z = y)$ et $\forall x \forall y (x + y = y + x)$?
3. Mêmes questions pour le modèle \mathcal{M}_2 défini par $\mathcal{M}_2 = \mathbb{Z}$, $0_{\mathcal{M}_2}$ l'entier 0, $s_{\mathcal{M}_2}$ le successeur sur \mathbb{Z} , $+_{\mathcal{M}_2}$ l'addition sur \mathbb{Z} , $\times_{\mathcal{M}_2}$ la multiplication sur \mathbb{Z} , et $=_{\mathcal{M}_2}$ l'égalité sur \mathbb{Z} .

On considère l'ensemble \mathcal{E} des axiomes (1), (2), (5), (6), et (7) de PA (on a enlevé les axiomes de la multiplication et le schéma de récurrence).

3. Exhiber un modèle \mathcal{M} de \mathcal{E} tel qu'il existe $x \in \mathcal{M}$ tel que pour tout n , $x \neq s_{\mathcal{M}}^n(0_{\mathcal{M}})$.
4. Exhiber un modèle \mathcal{M} de \mathcal{E} qui n'est pas un modèle de $\forall x \forall y (x + y = y + x)$.
5. Les formules suivantes sont-elles prouvables dans \mathcal{E} ?
 - (a) $P(0), \forall x P(x) \Rightarrow P(S(x)) \vdash P(S(S(S(0))))$.
 - (b) $P(0), \forall x P(x) \Rightarrow P(S(x)) \vdash \forall x P(x)$.

An axiom A is *independent* from a theory \mathcal{T} iff the sequents $\mathcal{T} \vdash A$ and $\mathcal{T} \vdash \neg A$ are not provable.

6. Montrez que le schéma d'induction est indépendant des autres axiomes de PA.

4 ZF

Exercice 6 : Une théorie des ensembles finis

Donnez un modèle de $ZF \setminus \{ \mathbf{Infinity} \}$ dans lequel tous les ensembles sont finis.
Concluez l'indépendance de l'axiome de l'infini du reste des axiomes de ZF.