Langages Formels – TD 1

Guillaume Scerri (guillaume.scerri@lmf.cnrs.fr)

29 janvier 2026

Exercise 1 : Construction d'automates

On note $\Sigma = \{0, 1\}$.

1. Donner un automate qui reconnaît les langages :
   (a) $L_1 = \{u \in \Sigma^* : \text{ toute occurence de 1 est suivie de deux occurences de 0}\}$
   (b) $L_2 = \{u \in \Sigma^* : u \text{ ne contient pas deux occurences successives de 0}\}$
   (c) $L_3 = \{u \in \Sigma^* : \text{ le nombre d'occurences de 1 est pair}\}$
2. Donner un automate qui reconnaît le langage des multiples de 3 en base 2 où la représentation des entiers est "big-endian" (i.e. les bits sont rangés du plus fort au plus faible).

Exercise 2 : Opérations et problèmes : questions de cours

1. Étant donné un langage reconnaissable, montrer que son complémentaire est encore reconnaissable.
2. Étant donnés deux langages reconnaissables montrer que leur union, intersection et différence sont encore des langages reconnaissables.
3. Étant donné un langage reconnaissable L, montrer que l'ensemble des suffixes des mots de L est encore reconnaissable.
4. L'appartenance du mot vide ε à un langage reconnaissable est-elle décidable ?
5. La vacuité d'un langage reconnaissable est-elle décidable ?
6. L'universalité d'un langage reconnaissable est-elle décidable ?

Exercise 3 : Lemme d'Arden

Let A, B be two languages.

1. Prove that the language $L = A^*B$ is the smallest solution to the equation :

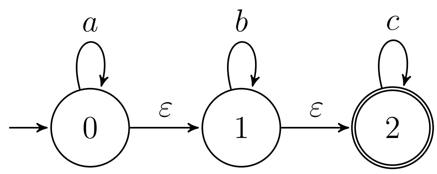
$$X \quad = \quad (A \cdot X) \cup B$$

2. Prove that if $\varepsilon \notin A$, then it is the only solution.

Exercise 4 : ε-transitions

Un automate fini avec ε-transitions sur un alphabet Σ est un 5-uplet $\langle Q, \Sigma, I, F, \delta \rangle$ où $I, F \subseteq Q$ et $\delta \subseteq Q \times \Sigma \cup \{\varepsilon\} \times Q$. Une ε-transition (une transition étiquetée par ε) peut être empruntée sans consommer de lettres du mot d'entrée. Les notions de chemin et d'acceptation sont étendues de manière naturelle.

1. On se place sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Quel est le langage reconnu par l'automate $\mathcal{A}_0$?



Un automate $\mathcal{A}_0$ avec ε-transitions

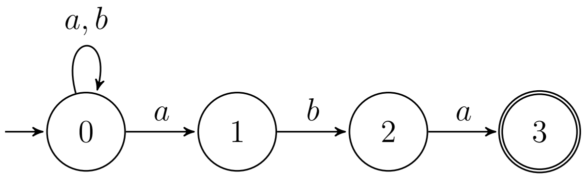
Soit $\mathcal{A} = \langle Q, I, F, \delta \rangle$ un automate avec ε-transitions. Pour tout état $q \in Q$, on note $Cl(q)$ la clôture par ε-transitions de l'état q :

$$q' \in Cl(q) \quad \Leftrightarrow \quad \text{il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } q \xrightarrow{\varepsilon}{}^{n}_{\delta} q'$$

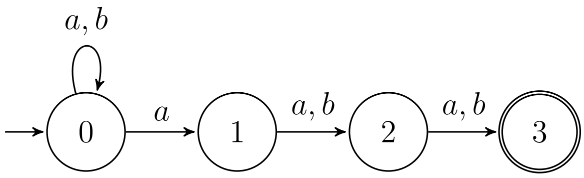
2. Quelles sont les clôtures des états de $\mathcal{A}_0$?
3. Pour tout $\mathcal{A} = \langle Q, I, F, \delta \rangle$ un automate avec ε-transitions, construire un automate sans ε-transitions $\hat{\mathcal{A}}$ qui reconnait le même langage avec le même nombre d'états que $\mathcal{A}$.
4. Donner un automate déterministe qui reconnait le même langage que l'automate $\mathcal{A}_0$.

Exercise 5 : Déterminisation

1. Pour chacun des automates $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$, déterminer le langage reconnu et donner un automate déterministe équivalent.



(a) Automate $\mathcal{A}_1$



(b) Automate $\mathcal{A}_2$

2. Si $\Sigma = \{a, b\}$, montrer que le langage $L = \Sigma^* a \Sigma^{n-1}$ ne peut être reconnu par un automate déterministe de moins de 2^n états.
3. Conclure sur le nombre d'états d'automates déterminisés par rapport à leur version non déterministe.

Contrôle continu pour le 5 février 2026

Exercise 6 : Plus long préfixe commun

Étant donné un automate reconnaissant un langage L non vide, montrer que l'on peut calculer le plus long préfixe commun à tous les mots de L.

Exercise 7 : Stuttering extension

Soit $w \in \Sigma^*$ un mot, on dit que w' est un stuttering de w si il existe w_1, w_2 mots et $a \in \Sigma$ tels que

1. $w = w_1.w_2$,
2. $w' = w_1.a.w_2$,
3. $a \in w_1$.

Pour $L \subseteq \Sigma^*$ langage, on définit $\mathrm{st}(L)$ l'extension par stuttering de L comme étant le plus petit langage contenant L et clos par stuttering.

1. Donner une expression rationnelle caractérisant $\mathrm{st}(\{ab\})$.
2. Prouver si L est rationnel, $\mathrm{st}(L)$ est rationnel.
3. Prouver que pour tout langage L (pas nécessairement rationnel), $\mathrm{st}(L)$ est rationnel.
4. Caractériser un expression rationnelle qui reconnaît $\mathrm{st}(L)$.