Langages Formels

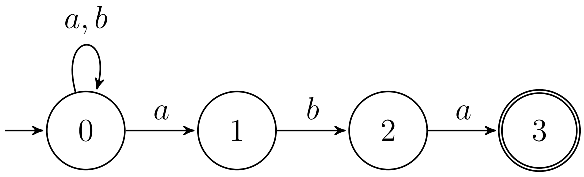
TD 2

Guillaume Scerri
guillaume.scerri@lmf.cnrs.fr

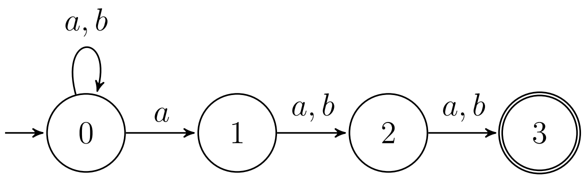
31 janvier 2025

Exercise 1 : Déterminisation

1. Pour chacun des automates $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$, déterminer le langage reconnu et donner un automate déterministe équivalent.



(a) Automate $\mathcal{A}_1$



(b) Automate $\mathcal{A}_2$

2. Si $\Sigma = \{a, b\}$, montrer que le langage $L = \Sigma^* a \Sigma^{n-1}$ ne peut être reconnu par un automate déterministe de moins de 2^n états.
3. Conclure sur le nombre d'états d'automates déterminisés par rapport à leur version non déterministe.

Exercise 2 : Des étoiles

On considère les énoncés suivants, de plus en plus forts.

Soit $L \subseteq \Sigma^*$, il existe $N > 0$ tel que pour tout $x \in L$:

(a) Si $|x| \geq N$ alors il peut s'écrire $x = u_1 u_2 u_3$ avec $u_2 \neq \varepsilon$ et $u_1 u_2^* u_3 \subseteq L$.
(b) Si $x = w_1 w_2 w_3$ avec $|w_2| \geq N$ alors $w_2 = u_1 u_2 u_3$ avec $u_2 \neq \varepsilon$ et $w_1 u_1 u_2^* u_3 w_3 \subseteq L$.
(c) Si $x = u v_1 v_2 \dots v_M w$ avec $|v_i| \geq 1$ et $M \geq N$, alors il existe $0 \leq j < k \leq M$ tel que $u v_1 \dots v_j (v_{j+1} \dots v_k)^* v_{k+1} \dots v_M w \subseteq L$.

1. Montrer que tout langage reconnaissable vérifie l'énoncé (a).
2. Montrer que $\{ a^n b^n \ : \ n \in \mathbb{N} \}$ n'est pas reconnaissable.

On admet que les langages reconnaissables satisfont les trois propriétés (a), (b), et (c).

3. Montrer que le langage $\{ a^{n^2} \ : \ n \in \mathbb{N} \}$ n'est pas reconnaissable.
4. Montrer que $\{ u \ : \ u = \widetilde{u} \}$, c'est à dire le langage des palindromes, n'est pas reconnaissable.

5. De même pour $\{ (ab)^n(cd)^n \ : \ n \in \mathbb{N} \} \cup (\Sigma^*\{ aa, bb, cc, dd, ac \}\Sigma^*)$.
6. Montrer que le langage suivant satisfait (c) mais n'est pas reconnaissable : $\{ udv \ : \ u, v \in \{a, b, c\}^*, \ u \neq v$ ou bien l'un des deux contient un carré $\}$. On pourra admettre l'existence d'une infinité de mots sans carrés sur l'alphabet $\{a, b, c\}$.

Exercise 3 : Blind bartender

A blind bartender with boxer gloves plays the following game with a customer : he has a tray in front of him with four glasses arranged in a square. Each of these glasses may or may not be turned, without the bartender knowing. The purpose of the bartender is to arrange so that all the glasses are turned in the same direction. To do this, he can each turn choose one of the following three actions :

— Turn one of the glasses
— Turn two neighboring glasses
— Turn two opposing glasses

To add to the difficulty, the customer can turn the tray any number of quarter turns between each of the bartender's actions. The game ends as soon as one of the two winning positions is reached.

Show that we can restrict the number of different configurations to four, then represent the possible actions of the game by a non-deterministic automaton.

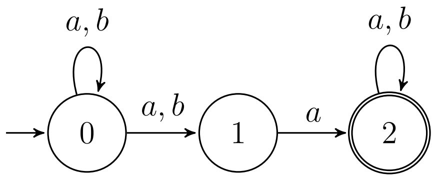
Determine this automaton and deduce a winning strategy for the bartender.

Exercise 4 :

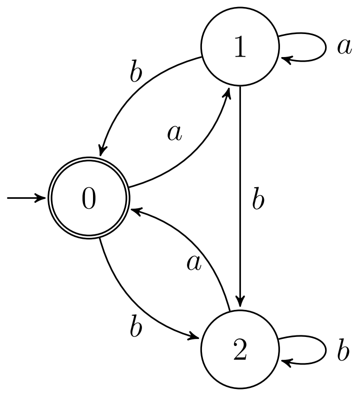
Dessiner l'automate qui reconnait le langage des mots w sur l'alphabet $\{a, b\}$ tels que $|w|_b$ est pair et $|w|_a$ est divisible par 3.

Exercise 5 : Déterminisation

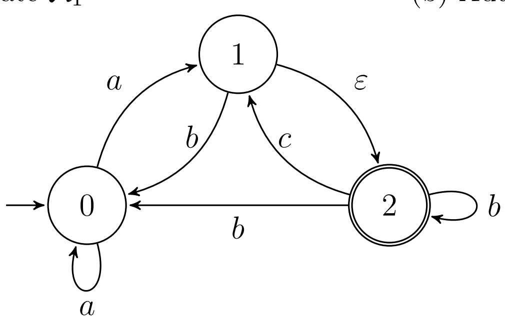
Déterminisez les automates suivants. Quels langages reconnaissent-ils ?



(a) Automate $\mathcal{A}_1$



(b) Automate $\mathcal{A}_2$



(c) Automate $\mathcal{A}_3$