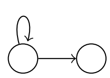
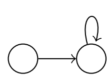
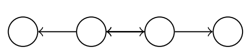
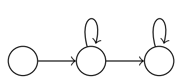
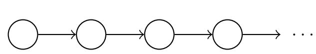
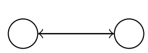
λ-calcul et logique informatique

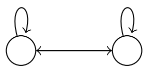
guillaume.scerri@lmf.cnrs.fr

Exercice 1
Parmi les termes suivants, indiquer lesquels sont α-équivalents et lesquels sont β-équivalents :

1. $(\lambda x.\ \lambda y.\ x)\ x$
2. $\lambda x.\ x$
3. $(\lambda x.\ \lambda x.\ x)\ x$
4. $(\lambda x.\ \lambda y.\ y)\ x$
5. $(\lambda x.\ \lambda y.\ y)\ (\lambda x.\ x)$

Exercice 2 (Graphes de réduction)
Pour chacun des graphes suivants, trouver un λ-terme qui a pour graphe de réduction ce graphe (si possible) ou alors expliquer pourquoi c'est impossible :

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 
7. 

8. 

Exercice 3 (Booléens)
On code les booléens comme des projections dans le λ-calcul :

$$\begin{array}{rcl} [\top] & = & \lambda x.\lambda y.x \\ [\bot] & = & \lambda x.\lambda y.y \end{array}$$

Donner les encodages de la conjonction, la disjonction et la négation. Formellement, on cherche par exemple un terme A tel que $A\ [b]\ [b'] = [b \wedge b']$ pour tous booléens b et b'.

Exercice 4

1. Caractériser les termes M et N clos et β-normaux qui rendent l'équivalence vraie :
$$(\lambda x.\ \lambda y.\ M\ x) =_\beta (\lambda x.\ \lambda y.\ N\ y)$$
2. Donner une infinité de termes M clos et β-normaux tels que :
$$(\lambda z.\ \lambda s.\ s\ (M\ s\ z)) =_\beta (\lambda z.\ \lambda s.\ M\ s\ (s\ z))$$