λ-Calcul et Logique Informatique

guillaume.scerri@lmf.cnrs.fr

Exercice 1 — Paradoxe de Russell

On formalise (une partie de) la théorie naïve des ensemble en ajoutant à la logique du premier ordre les constructions suivantes :

- les termes du premier-ordre $\{ \ x \mid F \ \}$ représentant intuitivement un ensemble défini par compréhension ;
- les formules $t \in s$ représentant intuitivement l'appartenance ;
- les termes de preuve $I_\in$ et $E_\in$ pour introduire et éliminer les types $\in$;
- les règles de typage suivantes :

$$\frac{\Gamma \vdash u : F[x := t]}{\Gamma \vdash I_\in(u) : t \in \{ \ x \mid F \ \}} \qquad \frac{\Gamma \vdash u : t \in \{ \ x \mid F \ \}}{\Gamma \vdash E_\in(u) : F[x := t]}$$

— et enfin la nouvelle réduction $E_\in(I_\in(u)) \to u$.

Nous allons formaliser le paradoxe de Russell (aussi appelé paradoxe du menteur) dans ce système, et ainsi montrer son incohérence. Pour cela, on pose $S := \{\ x \mid \neg(x \in x)\ \}$.

1. Donner un terme de type $(S \in S) \Rightarrow \neg(S \in S)$.
2. En déduire un terme de type $S \in S$ et un terme de type $\bot$.
3. Ce terme vous rappelle-t-il quelque chose ? Réduisez-le au besoin.

Exercice 2 — Connecteurs logiques dans le système $\mathcal{F}$

On rappelle les règles de typage pour la nouvelle construction du système $\mathcal{F}$, la quantification du second ordre. On note en majuscule les variables de type, et on suppose que la variable X n'apparaît pas libre dans Γ.

$$\frac{\Gamma \vdash u : F}{\Gamma \vdash \lambda X.\, u : \forall X.\, F} \qquad \frac{\Gamma \vdash u : \forall X.\, F}{\Gamma \vdash u\, T : F[X := T]}$$

1. On pose $\bot \overset{\text{def}}{=} \forall X.\ X$. Démontrer $\bot \Rightarrow P$ pour un type / une formule quelconque P.

2. On pose $A \wedge B \stackrel{\text{def}}{=} \forall X.\, (A \Rightarrow B \Rightarrow X) \Rightarrow X$. Montrer que cet encodage rend admissibles les règles usuelles de la conjonction, en donnant les encodages correspondants pour les constructions de paire et projections :

$$\frac{\Gamma \vdash u : A \quad \Gamma \vdash v : B}{\Gamma \vdash \langle u, v\rangle : A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma \vdash u : A_1 \wedge A_2}{\Gamma \vdash \pi_i(u) : A_i}$$

3. On pose $A \vee B \stackrel{\text{def}}{=} \forall X.\, (A \Rightarrow X) \Rightarrow (B \Rightarrow X) \Rightarrow X$. Dériver les règles usuelles :

$$\frac{\Gamma \vdash u : A_i}{\Gamma \vdash \iota_i(u) : A_1 \vee A_2} \qquad \frac{\Gamma \vdash u : A \vee B \quad \Gamma, x_1 : A \vdash v_1 : C \quad \Gamma, x_2 : B \vdash v_2}{\Gamma \vdash \mathrm{case}(u, x_1.v_1, x_2.v_2) : C}$$

4. Proposer un encodage de $\exists X.\, F$ qui permette de dériver les règles suivantes (où on suppose que X n'apparaît pas dans Γ et P).

$$\frac{\Gamma \vdash u : F[X := T]}{\Gamma \vdash \langle\langle T, u\rangle\rangle : \exists X.\, F} \qquad \frac{\Gamma \vdash u : \exists X.\, F \quad \Gamma, x : F \vdash v : P}{\Gamma \vdash \mathrm{CASE}(u, x.v) : P}$$

Remarque : on pourrait aussi vérifier que les réductions attendues (par exemple, $\mathrm{case}(\iota_i(u), x_1.v_1, x_2.v_2) \to v_i[x_i := u]$) sont simulées par nos encodages.