λ-calcul et logique informatique

guillaume.scerri@lmf.cnrs.fr

Exercice 1 — Combinateurs

On définit $\mathcal{C}$ le calcul de combinateurs $\mathbf{SK}$: les termes sont construits suivant la grammaire

$$M := \mathcal{V} \mid (M\ M) \mid \mathbf{S} \mid \mathbf{K}$$

Par convention, MNP représente $((MN)P)$. La réduction $\rightarrow$ est plus petite congruence contenant

$$\mathbf{K}\ M\ N \rightarrow M \qquad \mathbf{S}\ M\ N\ P \rightarrow (M\ P)\ (N\ P)$$

1. Définir l'ensemble $V(M)$ des variables apparaissant dans un terme M de $\mathcal{C}$.
2. Définir $\rightarrow$ formellement, i.e. au moyen de règles d'inférence.
3. Montrer que $M \rightarrow^* M'$ et $N \rightarrow^* N'$ implique $MN \rightarrow^* M'N'$.

4. (a) Définir une notion naturelle de substitution dans le $\mathcal{C}$ calcul, i.e. définir $M[x := N]$ pour $x \in \mathcal{V}$ et $M, N \in \mathcal{C}$.
   (b) Que vaut $M[x := N]$ si $x \notin V(M)$?
5. (a) On pose $\mathbf{I} := \mathbf{S}\ \mathbf{K}\ \mathbf{K}$. Réduire $\mathbf{I}\ M$ pour un terme M quelconque.
   (b) Donner un terme $\mathbf{I}'$ différent de $\mathbf{I}$, tel que $\mathbf{I}M$ et $\mathbf{I}'M$ se réduisent en le même terme.
6. Construire une traduction simple de $\mathcal{C}$ dans Λ telle que $M \to N$ implique $[M]_{\mathcal{C}} \to_{\beta}^{*} [N]_{\mathcal{C}}$ pour tout $M, N \in \mathcal{C}$.
7. (a) Soit $x \in \mathcal{V}$. Pour tout $M \in \mathcal{C}$ on définit $[x]M$, par récurrence sur M.
   - $[x]x := \mathbf{I}$
   - $[x]M := \mathbf{K}\ M$ si $x \notin V(M)$.
   - $[x](AB) := \mathbf{S}\ ([x]A)\ ([x]B)$ si $x \in V(AB)$.

   Montrer que pour tout x, M et N, on a $([x]M)N \to^{*} M[x := N]$.
   (b) Définir une construction $\{x\}M$ légèrement différente de $[x]M$ avec la même propriété que ci-dessus. (Toujours avec $\mathbf{I}$, pas un $\mathbf{I}'$.)
8. (a) Montrer que pour tout $M, N \in \mathcal{C}$ et $x, y \in \mathcal{V}$ tels que $y \neq x$ et $y \notin V(N)$, on a $([y]M)[x := N] = [y](M[x := N])$.

(b) Montrer que chacune des hypothèses $y \neq x$ et $y \notin V(N)$ ci-dessus sont utiles.

(c) Montrer que la construction $\{x\}M$ ne vérifie pas cette propriété de substitution.

9. On définit une traduction $u \mapsto u^*$ de Λ dans $\mathcal{C}$ comme suit.
   - $x^* := x$
   - $(uv)^* = u^* v^*$
   - $(\lambda x.u)^* = [x]u^*$

   Montrer que pour tout $x \in \mathcal{V}$ et $A, B \in \Lambda$, on a $A^*[x := B^*] = (A[x := B])^*$.

10. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{V}$ et $M \in \mathcal{C}$, on a $[[x]M]_{\mathcal{C}} \rightarrow^*_\beta \lambda x.[M]_{\mathcal{C}}$.

11. On appelle $\triangleright$ la restriction de la β-réduction qui ne réduit pas sous les λ.
   (a) Définir $\triangleright$ formellement.
   (b) Montrer que $u \triangleright v$ implique $u^* \rightarrow^* v^*$.

12. Montrer que tout lambda-terme u est β-équivalent à $[u^*]_{\mathcal{C}}$.

13. (a) Le $\mathcal{C}$ calcul termine-t-il ?
   (b) Définir une réduction parallèle $\Rightarrow$ dans le $\mathcal{C}$ calcul et montrer sa confluence forte.

(c) Montrer que $\rightarrow \subseteq \Rightarrow \subseteq \rightarrow^*$.

(d) Montrer que si $M \leftrightarrow^* N$, alors il existe P tel que $M \rightarrow^* P$ et $N \rightarrow^* P$.

(e) A-t-on $\mathbf{K} \leftrightarrow^* [x][y]x$?