

λ-calcul et logique informatique

guillaume.scerri@lmf.cnrs.fr

Exercice 1 — Combinateurs

On définit \mathcal{C} le calcul de combinateurs **SK** : les termes sont construits suivant la grammaire

$$M := \mathcal{V} \mid (M M) \mid \mathbf{S} \mid \mathbf{K}$$

Par convention, MNP représente $((MN)P)$. La réduction \rightarrow est plus petite congruence contenant

$$\mathbf{K} M N \rightarrow M \quad \mathbf{S} M N P \rightarrow (M P) (N P)$$

1. Définir l'ensemble $V(M)$ des variables apparaissant dans un terme M de \mathcal{C} .
2. Définir \rightarrow formellement, i.e. au moyen de règles d'inférence.
3. Montrer que $M \rightarrow^* M'$ et $N \rightarrow^* N'$ implique $MN \rightarrow^* M'N'$.
4. (a) Définir une notion naturelle de substitution dans le \mathcal{C} calcul, i.e. définir $M[x := N]$ pour $x \in \mathcal{V}$ et $M, N \in \mathcal{C}$.
(b) Que vaut $M[x := N]$ si $x \notin V(M)$?
5. (a) On pose $\mathbf{I} := \mathbf{S} \mathbf{K} \mathbf{K}$. Réduire $\mathbf{I} M$ pour un terme M quelconque.
(b) Donner un terme \mathbf{I}' différent de \mathbf{I} , tel que $\mathbf{I} M$ et $\mathbf{I}' M$ se réduisent en le même terme.
6. Construire une traduction simple de \mathcal{C} dans Λ telle que $M \rightarrow N$ implique $[M]_{\mathcal{C}} \rightarrow_{\beta}^* [N]_{\mathcal{C}}$ pour tout $M, N \in \mathcal{C}$.
7. (a) Soit $x \in \mathcal{V}$. Pour tout $M \in \mathcal{C}$ on définit $[x]M$, par récurrence sur M .
 - $[x]x := \mathbf{I}$
 - $[x]M := \mathbf{K} M$ si $x \notin V(M)$.
 - $[x](AB) := \mathbf{S} ([x]A) ([x]B)$ si $x \in V(AB)$.
 Montrer que pour tout x, M et N , on a $([x]M)N \rightarrow^* M[x := N]$.
(b) Définir une construction $\{x\}M$ légèrement différente de $[x]M$ avec la même propriété que ci-dessus. (Toujours avec \mathbf{I} , pas un \mathbf{I}' .)
8. (a) Montrer que pour tout $M, N \in \mathcal{C}$ et $x, y \in \mathcal{V}$ tels que $y \neq x$ et $y \notin V(N)$, on a $([y]M)[x := N] = [y](M[x := N])$.
(b) Montrer que chacune des hypothèses $y \neq x$ et $y \notin V(N)$ ci-dessus sont utiles.
(c) Montrer que la construction $\{x\}M$ ne vérifie pas cette propriété de substitution.
9. On définit une traduction $u \mapsto u^*$ de Λ dans \mathcal{C} comme suit.
 - $x^* := x$
 - $(uv)^* = u^*v^*$
 - $(\lambda x.u)^* = [x]u^*$
 Montrer que pour tout $x \in \mathcal{V}$ et $A, B \in \Lambda$, on a $A^*[x := B^*] = (A[x := B])^*$.
10. Montrer que pour tout $x \in \mathcal{V}$ et $M \in \mathcal{C}$, on a $[x]M]_{\mathcal{C}} \rightarrow_{\beta}^* \lambda x.[M]_{\mathcal{C}}$.

11. On appelle \triangleright la restriction de la β -réduction qui ne réduit pas sous les λ .
 - (a) Définir \triangleright formellement.
 - (b) Montrer que $u \triangleright v$ implique $u^* \rightarrow^* v^*$.
12. Montrer que tout lambda-terme u est β -équivalent à $[u^*]_{\mathcal{C}}$.
13. (a) Le \mathcal{C} calcul termine-t-il?
 - (b) Définir une réduction parallèle \Rightarrow dans le \mathcal{C} calcul et montrer sa confluence forte.
 - (c) Montrer que $\rightarrow_{\mathcal{C}} \subseteq \Rightarrow_{\mathcal{C}} \rightarrow^*$.
 - (d) Montrer que si $M \leftrightarrow^* N$, alors il existe P tel que $M \rightarrow^* P$ et $N \rightarrow^* P$.
 - (e) A-t-on $\mathbf{K} \leftrightarrow^* [x][y]x$?