

λ-calcul et logique informatique

guillaume.scerri@lmf.cnrs.fr

Exercice 1 — Un lemme de substitution

Soit $u, v, w \in \Lambda$ et x, y deux variables telles que $x, y \notin BV(u)$ et $FV(w) \cap BV(u) = FV(v) \cap BV(u) = \emptyset$ (tel que les substitutions ci-dessous soient valides).

1. Trouver u, v, w tel que $u[y := w][x := v] \neq u[x := v][y := w]$.
2. Trouver u, v, w tel que $u[y := w][x := v] \neq u[x := v][y := w[x := v]]$.
3. Montrer que si $y \notin FV(v)$, alors $u[y := w][x := v] = u[x := v][y := w[x := v]]$.

Exercice 2 — β-réduction et clôture réflexive et transitive

Ci-dessous, on donne la définition par récurrence de la clôture réflexive et transitive d'une relation binaire $\rightarrow$ quelconque.

$$\frac{}{u \rightarrow^* u} \text{ refl} \qquad \frac{u \rightarrow v}{u \rightarrow^* v} \text{ incl} \qquad \frac{u \rightarrow^* w \quad w \rightarrow^* v}{u \rightarrow^* v} \text{ trans}$$

Dans cet exercice, la flèche simple $\rightarrow$ dénote dorénavant la β-réduction.

1. Montrer que pour tout $u, u' \in \Lambda$, si $u \rightarrow^* u'$ alors $\lambda x.u \rightarrow^* \lambda x.u'$.
2. Montrer que pour tout $u, u', v \in \Lambda$, si $u \rightarrow^* u'$ alors $uv \rightarrow^* u'v$.
3. Montrer que pour tout $u, v, v' \in \Lambda$, si $v \rightarrow^* v'$ alors $uv \rightarrow^* uv'$.

Exercice 3 — (Réduction parallèle)

Dans cet exercice, la flèche simple $\rightarrow$ dénote la β -réduction. On rappelle les règles de la β -réduction :

$$\begin{array}{cc} \frac{}{(\lambda x.u)v \rightarrow u[x := v]} \text{ beta} & \frac{u \rightarrow u'}{\lambda x.u \rightarrow \lambda x.u'} \text{ abs} \\ \frac{u \rightarrow u'}{uv \rightarrow u'v} \text{ appG} & \frac{v \rightarrow v'}{uv \rightarrow uv'} \text{ appD} \end{array}$$

On définit la réduction parallèle comme suit, où y représente une variable abstraite :

$$\begin{array}{cc} \frac{u \Rightarrow u' \quad v \Rightarrow v'}{uv \Rightarrow u'v'} \text{ appP} & \frac{u \Rightarrow u'}{\lambda x.u \Rightarrow \lambda x.u'} \text{ absP} \\ \frac{}{y \Rightarrow y} \text{ reflVarP} & \frac{u \Rightarrow u' \quad v \Rightarrow v'}{(\lambda x.u)v \Rightarrow u'[x := v']} \text{ betaP} \end{array}$$

1. Montrer que la règle supplémentaire suivante peut se déduire des règles originales.

$$\frac{}{\overline{u} \Rightarrow \overline{u}} \text{ reflP}$$

2. Montrer que la règle supplémentaire suivante peut se déduire des règles originales.

$$\frac{u \Rightarrow u' \quad v \Rightarrow v'}{u[x := v] \Rightarrow u'[x := v']} \text{ subP}$$

3. Montrer les inclusions suivantes en donnant des exemples illustrant qu'elles sont strictes :

(a) $\rightarrow \subseteq \Rightarrow$

(b) $\Rightarrow \subseteq \rightarrow^*$

4. Montrer que $\Rightarrow$ est fortement confluente.
5. En déduire que $\rightarrow$ est confluente.