TD2 février 2025

λ-calcul et logique informatique

guillaume.scerri@lmf.cnrs.fr

Exercice 1 — Un lemme de substitution

Soit $u, v, w \in \Lambda$ et x, y deux variables telles que $x, y \notin BV(u)$ et $FV(w) \cap BV(u) = FV(v) \cap BV(u) = \emptyset$ (tel que les substitutions ci-dessous soient valides).

1. Trouver u, v, w tel que $u[y := w][x := v] \neq u[x := v][y := w]$.
2. Trouver u, v, w tel que $u[y := w][x := v] \neq u[x := v][y := w[x := v]]$.
3. Montrer que si $y \notin FV(v)$, alors $u[y := w][x := v] = u[x := v][y := w[x := v]]$.

Exercice 2 — β-réduction et clôture reflexive et transitive

Ci-dessous, on donne la définition par récurrence de la clôture reflexive et transitive d'une relation binaire $\rightarrow$ quelconque.

$$\frac{}{u \rightarrow^* u}\text{ refl} \qquad \frac{u \rightarrow v}{u \rightarrow^* v}\text{ incl} \qquad \frac{u \rightarrow^* w \quad w \rightarrow^* v}{u \rightarrow^* v}\text{ trans}$$

Dans cet exercice, la flèche simple $\rightarrow$ dénote dorénavant la β-réduction.

1. Montrer que pour tout $u, u' \in \Lambda$, si $u \rightarrow^* u'$ alors $\lambda x.u \rightarrow^* \lambda x.u'$.
2. Montrer que pour tout $u, u', v \in \Lambda$, si $u \rightarrow^* u'$ alors $uv \rightarrow^* u'v$.
3. Montrer que pour tout $u, v, v' \in \Lambda$, si $v \rightarrow^* v'$ alors $uv \rightarrow^* uv'$.

Exercice 3 — (Réduction parallèle)
Dans cet exercice, la flèche simple $\to$ dénote la β-réduction. On rappelle les régles de la β-réduction :

$$\frac{}{(\lambda x.u)v \to u[x := v]}\ \text{beta} \qquad \frac{u \to u'}{\lambda x.u \to \lambda x.u'}\ \text{abs}$$

$$\frac{u \to u'}{uv \to u'v}\ \text{appG} \qquad \frac{v \to v'}{uv \to uv'}\ \text{appD}$$

On définit la réduction parallèle comme suit, où y représent une variable abritraire :

$$\frac{u \Rightarrow u' \quad v \Rightarrow v'}{uv \Rightarrow u'v'}\ \text{appP} \qquad \frac{u \Rightarrow u'}{\lambda x.u \Rightarrow \lambda x.u'}\ \text{absP}$$

$$\frac{}{y \Rightarrow y}\ \text{reflVarP} \qquad \frac{u \Rightarrow u' \quad v \Rightarrow v'}{(\lambda x.u)v \Rightarrow u'[x := v']}\ \text{betaP}$$

1. Montrer que la règle supplémentaire suivante peut se déduire des règles originales.
$$\frac{}{u \Rightarrow u}\ \text{reflP}$$
2. Montrer que la règle supplémentaire suivante peut se déduire des règles originales.
$$\frac{u \Rightarrow u' \quad v \Rightarrow v'}{u[x := v] \Rightarrow u'[x := v']}\ \text{subP}$$
3. Montrer les inclusions suivantes en donnant des exemples illustrant qu'elles sont strictes :
   (a) $\to \subseteq \Rightarrow$
   (b) $\Rightarrow \subseteq \to^*$
4. Montrer que $\Rightarrow$ est fortement confluente.
5. En déduire que $\to$ est confluente.