

λ -calcul et logique informatique

guillaume.scerri@lmf.cnrs.fr

Exercice 1 — (Réduction parallèle)

Dans cet exercice, la flèche simple $\rightarrow$ dénote la β -réduction. On rappelle les règles de la β -réduction :

$$\begin{array}{cc} \frac{}{(\lambda x.u)v \rightarrow u[x := v]} \text{ beta} & \frac{u \rightarrow u'}{\lambda x.u \rightarrow \lambda x.u'} \text{ abs} \\ \frac{u \rightarrow u'}{uv \rightarrow u'v} \text{ appG} & \frac{v \rightarrow v'}{uv \rightarrow uv'} \text{ appD} \end{array}$$

On définit la réduction parallèle comme suit, où y représente une

variable arbitraire :

$$\frac{u \Rightarrow u' \quad v \Rightarrow v'}{uv \Rightarrow u'v'} \text{ appP}$$

$$\frac{u \Rightarrow u'}{\lambda x. u \Rightarrow \lambda x. u'} \text{ absP}$$

$$\overline{y \Rightarrow y} \text{ reflVarP}$$

$$\frac{u \Rightarrow u' \quad v \Rightarrow v'}{(\lambda x. u)v \Rightarrow u'[x := v']} \text{ betaP}$$

1. Montrer que la règle supplémentaire suivante peut se déduire des règles originales.

$$\overline{u \Rightarrow u} \text{ reflP}$$

2. Montrer que la règle supplémentaire suivante peut se déduire des règles originales.

$$\frac{u \Rightarrow u' \quad v \Rightarrow v'}{u[x := v] \Rightarrow u'[x := v']} \text{ subP}$$

3. Montrer les inclusions suivantes en donnant des exemples illustrant qu'elles sont strictes :

$$(a) \rightarrow \subseteq \Rightarrow$$

$$(b) \Rightarrow \subseteq \rightarrow^*$$

4. Montrer que $\Rightarrow$ est fortement confluente.

5. En déduire que $\rightarrow$ est confluente.

Exercice 2 — Encodages

1. Définir un codage des couples, c'est à dire des termes **couple**, π_1 et π_2 tels que pour tout N_1 et N_2 on a :

$$\pi_i (\mathbf{couple} \ N_1 \ N_2) \rightarrow^* N_i$$

A-t-on $M =_\beta \mathbf{couple} (\pi_1 \ M) (\pi_2 \ M)$ pour tout M ?

2. Pour les entiers, on utilise l'encodage de Church :

$$\bar{n} = \lambda f. \lambda x. f^n x = \lambda f. \lambda x. f (f (\dots x))$$

- (a) Définir $f^n x$ de manière rigoureuse. S'il existe plusieurs définitions possibles, dire comment vous prouveriez qu'elles sont équivalentes.
- (b) Rappeler l'encodage de zéro et du successeur.
- (c) Trouver un terme qui encode l'application $n \mapsto n + 2$. Combien y a-t-il de termes naturels pour cela ?
- (d) Rappeler deux encodages de l'addition. Montrer que l'un d'entre eux est correct.

- (e) Rappeler l'encodage de la multiplication vu en cours. En proposer un autre. Montrer qu'ils sont corrects.
- 3. Définir/rappeler le test à zéro pour les entiers de Church et montrer qu'il est correct.
- 4. Définir le prédécesseur pour les entiers de Church, avec **pred** $\bar{0} = \bar{0}$.
- 5. Définir (et justifier le cas échéant)
 - (a) un codage des listes. Quel est la liste vide ?
 - (b) l'ajout d'un élément en tête d'une liste.
 - (c) le test du vide.
 - (d) le calcul du premier élément d'une liste.
 - (e) la concaténation.
 - (f) la longueur d'une liste, le renversement.