λ-calcul et logique informatique

guillaume.scerri@lmf.cnrs.fr

Exercice 1 — (Réduction parallèle)
Dans cet exercice, la flèche simple $\to$ dénote la β-réduction. On rappelle les régles de la β-réduction :

$$\frac{}{(\lambda x.u)v \to u[x := v]}\ \text{beta} \qquad \frac{u \to u'}{\lambda x.u \to \lambda x.u'}\ \text{abs}$$
$$\frac{u \to u'}{uv \to u'v}\ \text{appG} \qquad \frac{v \to v'}{uv \to uv'}\ \text{appD}$$

On définit la réduction parallèle comme suit, où y représent une variable abritraire :

$$\frac{u \Rightarrow u' \quad v \Rightarrow v'}{uv \Rightarrow u'v'}\ \text{appP} \qquad \frac{u \Rightarrow u'}{\lambda x.u \Rightarrow \lambda x.u'}\ \text{absP}$$
$$\frac{}{y \Rightarrow y}\ \text{reflVarP} \qquad \frac{u \Rightarrow u' \quad v \Rightarrow v'}{(\lambda x.u)v \Rightarrow u'[x := v']}\ \text{betaP}$$

1. Montrer que la règle supplémentaire suivante peut se déduire des règles originales.
$$\frac{}{u \Rightarrow u}\ \text{reflP}$$
2. Montrer que la règle supplémentaire suivante peut se déduire des règles originales.
$$\frac{u \Rightarrow u' \quad v \Rightarrow v'}{u[x := v] \Rightarrow u'[x := v']}\ \text{subP}$$
3. Montrer les inclusions suivantes en donnant des exemples illustrant qu'elles sont strictes :
   (a) $\to \subseteq \Rightarrow$
   (b) $\Rightarrow \subseteq \to^*$
4. Montrer que $\Rightarrow$ est fortement confluente.

5. En déduire que $\to$ est confluente.

Exercice 2 — Encodages

1. Définir un codage des couples, c'est à dire des termes **couple**, π_1 et π_2 tels que pour tout N_1 et N_2 on a :

$$\pi_i\ (\mathbf{couple}\ N_1\ N_2) \to^* N_i$$

   A-t-on $M =_\beta$ **couple** $(\pi_1\ M)\ (\pi_2\ M)$ pour tout M ?

2. Pour les entiers, on utilise l'encodage de Church :

$$\overline{n} = \lambda f.\lambda x.\ f^n\ x = \lambda f.\lambda x.\ f\ (f\ (\dots\ x))$$

   (a) Définir $f^n x$ de manière rigoureuse. S'il existe plusieurs définitions possibles, dire comment vous prouveriez qu'elles sont équivalentes.
   (b) Rappeler l'encodage de zéro et du successeur.
   (c) Trouver un terme qui encode l'application $n \mapsto n + 2$. Combien y a-t-il de termes naturels pour cela ?
   (d) Rappeler deux encodages de l'addition. Montrer que l'un d'entre eux est correct.
   (e) Rappeler l'encodage de la multiplication vu en cours. En proposer un autre. Montrer qu'ils sont corrects.

3. Définir/rappeler le test à zéro pour les entiers de Church et montrer qu'il est correct.
4. Définir le prédecesseur pour les entiers de Church, avec **pred** $\overline{0} = \overline{0}$.
5. Définir (et justifier le cas échéant)
   (a) un codage des listes. Quel est la liste vide ?
   (b) l'ajout d'un élement en tête d'une liste.
   (c) le test du vide.
   (d) le calcul du premier élément d'une liste.
   (e) la concaténation.
   (f) la longueur d'une liste, le renversement.