Langages Formels - Grammaires et AAP

TD n°2

Isa Vialard
vialard@lsv.fr

April 23, 2024

Exercise 1 : Exemples d'automates à pile

1. Construire un automate à pile reconnaissant le langage $L_1 = \{\ u\tilde{u}\ :\ u \in \Sigma^*\ \}$.
2. Construire un automate à pile reconnaissant le langage de Dyck D_n^*, le langage des mots bien parenthésés sur l'alphabet à n paires de parenthèses $\Sigma_n = \{\ a_i, \bar{a}_i\ :\ i \in [1, n]\ \}$.
3. Construire un automate à pile reconnaissant le langage $L_2 = \{\ w \in \Sigma^*\ :\ |w|_a = 2|w|_b\ \}$.
4. Construire un automate à pile reconnaissant par pile vide le langage $L_3 = \{\ a^n b^p\ :\ 1 \leq n \leq p \leq 2n\ \}$.

Exercise 2 :

Mettre la grammaire suivante sous forme normale de Chomsky :

$S \to aAa$

$A \to Sb$

$A \to bBB$

$B \to abb$

$B \to aC$

$C \to aCA$

Exercise 3 : Langages linéaires et automates à un pic

Un automate à un pic est un automate à pile tel que dans tout calcul valide, la taille de la pile n'augmente plus une fois qu'elle a diminué. La taille de la pile peut donc augmenter (au sens large) pendant une première partie du calcul, puis elle ne fait que diminuer (au sens large).

Un langage est à un pic s'il peut être accepté par pile vide par un automate à un pic.

1. Montrer que le langage $L = \{a^n b^n | n \geq 1\} \cup \{a^n b^{2n} | n \geq 1\}$ est un langage à un pic.
2. Montrer que le langage $K = \{ba^{i_1}ba^{i_2}b \cdots ba^{i_n}b | n \geq 1 \text{ et } \exists j, i_j \neq j\}$ est un langage à un pic.
3. Montrer que tout langage linéaire est un langage à un pic.

Exercise 4 :

On s'intéresse ici à des automates dont l'alphabet de pile Γ est un singleton z.

1. Montrer que le langage $L = \{\ a^n b^m c\ :\ 1 \leq m \leq n\ \}$ peut être accepté par pile vide et état final par un automate dont l'alphabet de pile est un singleton.
2. Montrer que le langage L ne peut pas être accepté par pile vide par un automate dont l'alphabet de pile est un singleton.

Contrôle continu

À rendre pour Jeudi 04/04.

Exercise 5 : Exemples d'automates à pile

1. Construire un automate à pile reconnaissant le langage $L_1 = \{\ a^i b^j c^k\ :\ i + j = k\ \}$.
2. Construire un automate à pile reconnaissant le langage $L_2 = \{\ a^i b^j c^k\ :\ i + k = j\ \}$.
3. Construire un automate à pile reconnaissant le langage des palindromes $\{\ u \in \Sigma^*\ :\ \tilde{u} = u\ \}$ où $\tilde{u}$ est l'image mirroir de u.

Exercise 6 : Variantes d'automates à pile

Soit $A = (Q, \Sigma, Z, T, q_0, z_0, F)$ un automate à pile.

1. Montrer que l'on peut construire un automate à pile A' reconnaissant le même langage et tel que $T' \subseteq Q' \times Z \times (\Sigma \cup \{\ \varepsilon\ \}) \times Q' \times Z^{\leq 2}$.
2. Montrer que l'on peut construire un automate à pile A'' équivalent à A tel que les mouvements de la pile sont uniquement du type push ou pop ou skip.