Langages Formels - Grammaires et AAP

TD n°2

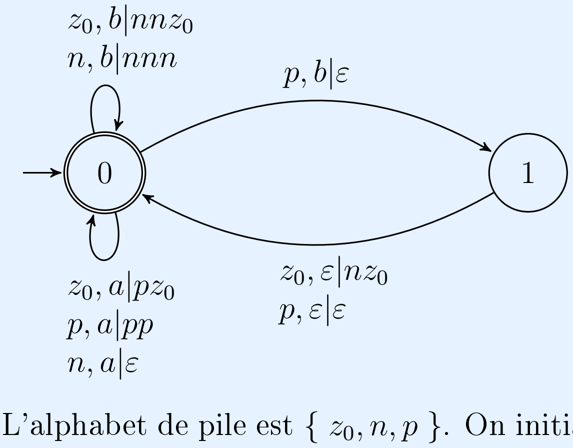
Isa Vialard
vialard@lsv.fr

April 23, 2024

Exercise 1 : Exemples d'automates à pile

1. Construire un automate à pile reconnaissant le langage $L_1 = \{ u\tilde{u} \ : \ u \in \Sigma^* \}$.
2. Construire un automate à pile reconnaissant le langage de Dyck D_n^*, le langage des mots bien parenthésés sur l'alphabet à n paires de parenthèses $\Sigma_n = \{ a_i, \bar{a}_i \ : \ i \in [1, n] \}$.
3. Construire un automate à pile reconnaissant le langage $L_2 = \{ w \in \Sigma^* \ : \ |w|_a = 2|w|_b \}$.

Attention on veut reconnaître le langage des mots qui ont deux fois plus de a que de b (et pas le contraire).



L'alphabet de pile est $\{ z_0, n, p \}$. On initialise la pile à z_0 et on accepte à $q_0 \times z_0$. Après avoir lu un mot w, on a l'invariant $|w|_a - 2|w|_b = \#p - \#n$.

4. Construire un automate à pile reconnaissant par pile vide le langage $L_3 = \{ a^n b^p \ : \ 1 \leq n \leq p \leq 2n \}$.

Exercise 2 :

Mettre la grammaire suivante sous forme normale de Chomsky :

$S \to aAa$

$A \to Sb$

$A \to bBB$

$B \to abb$

$B \to aC$

$C \to aCA$

Exercise 3 : Langages linéaires et automates à un pic

Un automate à un pic est un automate à pile tel que dans tout calcul valide, la taille de la pile n'augmente plus une fois qu'elle a diminué. La taille de la pile peut donc augmenter (au sens large) pendant une première partie du calcul, puis elle ne fait que diminuer (au sens large).

Un langage est à un pic s'il peut être accepté par pile vide par un automate à un pic.

1. Montrer que le langage $L = \{a^n b^n | n \geq 1\} \cup \{a^n b^{2n} | n \geq 1\}$ est un langage à un pic.
2. Montrer que le langage $K = \{ba^{i_1}ba^{i_2}b \cdots ba^{i_n}b | n \geq 1 \text{ et } \exists j, i_j \neq j\}$ est un langage à un pic.
3. Montrer que tout langage linéaire est un langage à un pic.

Exercise 4 :

On s'intéresse ici à des automates dont l'alphabet de pile Γ est un singleton z.

1. Montrer que le langage $L = \{ \ a^n b^m c \ : \ 1 \leq m \leq n \ \}$ peut être accepté par pile vide et état final par un automate dont l'alphabet de pile est un singleton.
2. Montrer que le langage L ne peut pas être accepté par pile vide par un automate dont l'alphabet de pile est un singleton.

Contrôle continu

À rendre pour Jeudi 04/04.

Exercise 5 : Exemples d'automates à pile

1. Construire un automate à pile reconnaissant le langage $L_1 = \{ \ a^i b^j c^k \ : \ i + j = k \ \}$.
2. Construire un automate à pile reconnaissant le langage $L_2 = \{ \ a^i b^j c^k \ : \ i + k = j \ \}$.

3. Construire un automate à pile reconnaissant le langage des palindromes $\{ u \in \Sigma^* \ : \ \tilde{u} = u \}$ où $\tilde{u}$ est l'image mirroir de u.

Exercise 6 : Variantes d'automates à pile

Soit $A = (Q, \Sigma, Z, T, q_0, z_0, F)$ un automate à pile.

1. Montrer que l'on peut construire un automate à pile A' reconnaissant le même langage et tel que $T' \subseteq Q' \times Z \times (\Sigma \cup \{ \varepsilon \}) \times Q' \times Z^{\leq 2}$.
2. Montrer que l'on peut construire un automate à pile A'' équivalent à A tel que les mouvements de la pile sont uniquement du type push ou pop ou skip.

   Une transition $z, a|z'$ peut être remplacée par un pop suivi d'un push, sauf si $z = z_0$. Pour gérer ce cas, on rajoute un élément z_0' en bas de la pile, et on change les états acceptants.