Langages Formels

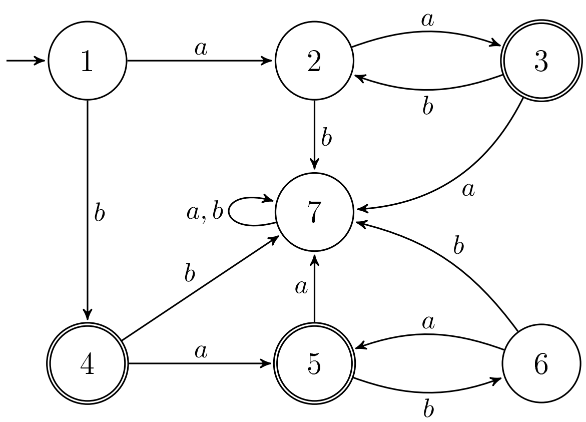
TD 5

Isa Vialard
vialard@lsv.fr

February 19, 2023

Exercise 1 : Minimization by MOORE's algorithm

1. Minimize the automata $\mathcal{A}_1$ and $\mathcal{A}_2$, using MOORE's algorithm:



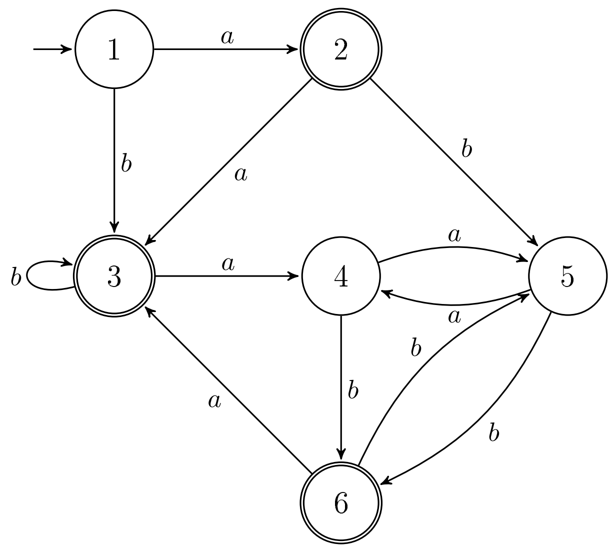
(a) Automaton $\mathcal{A}_1$

$\mathcal{A}_1$: On peut unifier les états 2 et 6, et les états 3 et 5.
$\mathcal{A}_2$: On peut unifier les états 2 et 6, et les états 4 et 5.

2. Give a minimal automaton for $\mathcal{L} = ((a(a+b)^2 + b)^* a(a+b))^*$.

$\mathcal{L}$ a quatre résidus:

$$\mathcal{L} = ((a(a+b)^2 + b)^* a(a+b))^* = b^{-1}\mathcal{L} = (aab)^{-1}\mathcal{L}$$
$$a^{-1}\mathcal{L} = (a+b)^2\mathcal{L} + (a+b)\mathcal{L}$$
$$(aa)^{-1}\mathcal{L} = (a+b)\mathcal{L} + \mathcal{L} = (ab)^{-1}\mathcal{L} = (aaab)^{-1}\mathcal{L}$$
$$(aaa)^{-1}\mathcal{L} = (a+b)^2\mathcal{L} + (a+b)\mathcal{L} + \mathcal{L} = (aaaa)^{-1}\mathcal{L}$$



(a) Automaton $\mathcal{A}_2$

Exercise 2 : Minimization by Brzozowski inversion

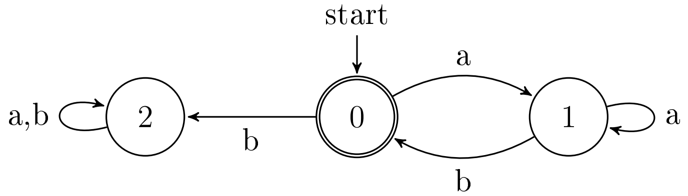
1. Show that the determinized of a co-deterministic co-accessible automaton which recognizes a language L is (isomorphic to) the minimal automaton of L.
2. Using this result, devise a procedure to minimize an automaton. What is the complexity of this method ?

Soit $\mathcal{A}$ co-déterministe co-accessible, i.e. $\mathcal{A} = \mathcal{B}^t$ l'automate $\mathcal{B} = (Q, q_i, F, \delta_{\mathcal{B}})$ déterministe et accessible où on échange les états initiaux et acceptants et inverse les transitions : $\mathcal{A} = (Q, F, q_i, \delta_{\mathcal{A}})$. On note $\mathcal{A}'$ le déterminisé de $\mathcal{A}$ dont on a enlevé les états inaccessibles. On veut montrer que $\mathcal{A}'$ est isomorphe à l'automate des résiduel : pour tout u, v tels que $u^{-1}\mathcal{L} = v^{-1}\mathcal{L}$, $\delta'(F, u) = \delta'(F, v)$.

Soit $p \in \delta'(F, u)$. $\mathcal{A}$ est co-accessible, donc $\exists w$ tel que $\delta_{\mathcal{A}}(p, w) = q_i$. Donc $uw \in \mathcal{L}$ et $vw \in \mathcal{L}$. $\mathcal{A}$ est co-déterministe, donc p est l'unique état tel que $(p, w) = q_i$. Ainsi $p \in \delta'(F, v)$. On peut montrer l'inclusion inverse $\delta'(F, v) \subseteq \delta'(F, u)$ de la même manière.

Exercise 3 : Transition monoid

We consider the following finite deterministic complete automaton $\mathcal{A}$ over $\Sigma = \{a, b\}$:



1. Give $\mathcal{L}(\mathcal{A})$.

   $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = (a^+b)^*$.

2. Give M the transition monoid of this automata, a morphism ϕ and $P \subset M$ such that $L = \phi^{-1}(P)$.

   $M = \{\phi(\varepsilon) = \langle 0, 1, 2\rangle, \phi(a) = \langle 1, 1, 2\rangle, \phi(b) = \langle 2, 0, 2\rangle, \phi(ab) = \langle 0, 0, 2\rangle, \phi(bb) = \langle 2, 2, 2\rangle, \phi(ba) = \langle 2, 1, 2\rangle\}$ and $P = \{\phi(\varepsilon), \phi(ab)\}$.

3. What is the syntactical congruence of L? What are its equivalence classes?

$$
\begin{aligned}
[\varepsilon] &= \varepsilon \\
[a] &= (a^+b)^*a \\
[b] &= b(a^+b)^* \\
[ab] &= (a^+b)^+ \\
[bb] &= \Sigma^* bb \Sigma^* \\
[ba] &= (ba^+)^+
\end{aligned}
$$

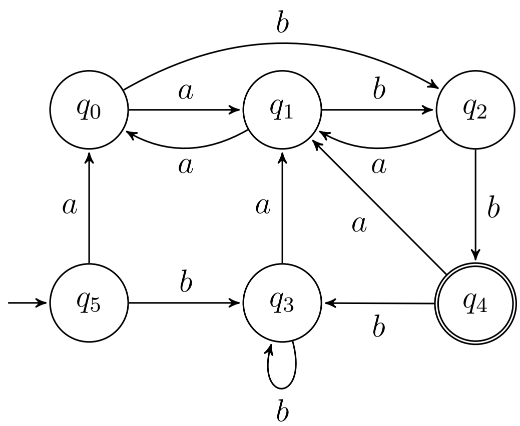
Contrôle continu 5

À rendre pour le 23/02 à 16h15.

Rappel : Votre note finale de contrôle continu sera la moyenne de vos trois meilleurs notes. Vous pouvez me rendre autant de contrôles continus que vous voulez (il y en aura 6 en tout pour cette partie du cours), mais je vous recommande de m'en rendre au moins 3.

Exercise 4 :

Minimize the following automaton, telling which method you choose and detailing the steps of the procedure.



Exercise 5 : Résiduels

Calculer les résiduels de $\mathcal{L} = a(b+ab)^* + b^*(a+bb)$ et construire son automate minimal.

Exercise 6 : Automate $\to$ Monoïde

Donnez le monoïde syntaxique M du langage $\mathcal{L}$ reconnu par cet automate, un morphisme ϕ et $P \subset M$ tel que $\phi^{-1}(P) = \mathcal{L}$.