$$\frac{}{\rho \vdash x := e \Rightarrow \rho[x \mapsto [\![e]\!]\rho]}\ (:=) \qquad \frac{}{\rho \vdash \texttt{skip} \Rightarrow \rho}\ (\texttt{Skip})$$

$$\frac{\rho \vdash c_1 \Rightarrow \rho' \quad \rho' \vdash c_2 \Rightarrow \rho''}{\rho \vdash c_1; c_2 \Rightarrow \rho''}\ (\texttt{Seq})$$

$$\frac{\rho \vdash c_1 \Rightarrow \rho'}{\rho \vdash \texttt{if } e \texttt{ then } c_1 \texttt{ else } c_2 \Rightarrow \rho'}\ (\texttt{if}_1) \text{ si } [\![e]\!]\rho \neq 0 \qquad \frac{\rho \vdash c_2 \Rightarrow \rho''}{\rho \vdash \texttt{if } e \texttt{ then } c_1 \texttt{ else } c_2 \Rightarrow \rho''}\ (\texttt{if}_2) \text{ si } [\![e]\!]\rho = 0$$

$$\frac{\rho \vdash c \Rightarrow \rho' \quad \rho' \vdash \texttt{while } e \texttt{ do } c \Rightarrow \rho''}{\rho \vdash \texttt{while } e \texttt{ do } c \Rightarrow \rho''}\ (\texttt{while}) \text{ si } [\![e]\!]\rho \neq 0 \qquad \frac{}{\rho \vdash \texttt{while } e \texttt{ do } c \Rightarrow \rho}\ (\texttt{while}_{\text{fin}}) \text{ si } [\![e]\!]\rho = 0$$

FIGURE 1 – La sémantique opérationnelle à grands pas de IMP.

$$\begin{aligned}
(x := e \cdot C, \rho) &\to (C, \rho[x \mapsto [\![e]\!]\rho]) \\
(\texttt{skip} \cdot C, \rho) &\to (C, \rho) \\
(c_1; c_2 \cdot C, \rho) &\to (c_1 \cdot c_2 \cdot C, \rho) \\
(\texttt{if } e \texttt{ then } c_1 \texttt{ else } c_2 \cdot C, \rho) &\to (c_1 \cdot C, \rho) \quad \text{si } [\![e]\!]\rho \neq 0 \\
(\texttt{if } e \texttt{ then } c_1 \texttt{ else } c_2 \cdot C, \rho) &\to (c_2 \cdot C, \rho) \quad \text{si } [\![e]\!]\rho = 0 \\
(\texttt{while } e \texttt{ do } c \cdot C, \rho) &\to (c \cdot \texttt{while } e \texttt{ do } c \cdot C, \rho) \quad \text{si } [\![e]\!]\rho \neq 0 \\
(\texttt{while } e \texttt{ do } c \cdot C, \rho) &\to (C, \rho) \quad \text{si } [\![e]\!]\rho = 0
\end{aligned}$$

FIGURE 2 – La sémantique opérationnelle à petits pas de IMP.

Théorèmes petit pas

Déterminisme La réduction est déterministe.

Progrès Les seules configurations ne possédant pas de successeur sont de la forme (ε, ρ).

Théorèmes grand pas

Déterminisme L'arbre de dérivation d'un jugement est unique.

Correction S'il existe une dérivation $\rho \vdash c \Rightarrow \rho_\infty$ alors il existe une dérivation $(c \cdot \varepsilon, \rho) \to^* (\varepsilon, \rho_\infty)$.

Adéquation S'il existe une dérivation $(c \cdot \varepsilon, \rho) \to^* (\varepsilon, \rho_\infty)$ alors il existe une dérivation $\rho \vdash c \Rightarrow \rho_\infty$.

Exercice 1 :

Soit c un programme et ρ un environnement. Montrer l'équivalence entre ces deux propositions :

1. Il existe une dérivation infinie de $(c \cdot \varepsilon, \rho)$;
2. Il n'existe pas de ρ_∞ tel que $\rho \vdash c \Rightarrow \rho_\infty$ est dérivable.

$$\frac{}{(x,\rho) \to_{pp} (\dot{\widehat{\rho(x)}},\rho)}\ (\texttt{Var}) \qquad \frac{(e_1,\rho) \to_{pp} (e_1',\rho)}{(e_1 \dot{+} e_2,\rho) \to_{pp} (e_1' \dot{+} e_2,\rho)}\ (+_\ell)$$

$$\frac{(e_2,\rho) \to_{pp} (e_2',\rho)}{(\dot{n} \dot{+} e_2,\rho) \to_{pp} (\dot{n} \dot{+} e_2',\rho)}\ (+_r) \qquad \frac{}{(\dot{n} \dot{+} \dot{m},\rho) \to_{pp} (\dot{\widehat{n+m}},\rho)}\ (+_{\text{fin}})$$

$$\frac{(e,\rho) \to_{pp} (e',\rho)}{(\dot{-}e,\rho) \to_{pp} (\dot{-}e',\rho)}\ (-) \qquad \frac{}{(\dot{-}\dot{n},\rho) \to_{pp} (\dot{\widehat{-n}},\rho)}\ (-_{\text{fin}})$$

FIGURE 3 – Sémantique opérationnelle à petits pas des expressions arithmétiques.

Solution :
Il suffit de procéder par contraposée. Les théorèmes de correction et d'adéquation montrent l'équivalence de non-1 et non-2.

Exercice 2 :
La sémantique opérationnelle à petit pas des expressions arithmétiques est en Figure 3.

1. Donner une preuve de

$$((x \dot{+} (\dot{-}y)) \dot{+} \dot{2}, \rho[x \mapsto 3, y \mapsto 2]) \to_{pp}^{*} (\dot{3}, \rho[x \mapsto 3, y \mapsto 2])$$

2. Énoncer puis prouver un théorème de progrès.
3. Énoncer puis prouver un théorème de déterminisme.
4. Montrer la correction de la sémantique dénotationnelle.
5. Montrer l'adéquation de la sémantique dénotationnelle.

Solution :

1. On commence par rappeler une distinction importante. $a \to_{pp}^{*} b$ signifie "le terme a se réduit en b avec autant de $\to_{pp}$ que nécessaire". Il faudra donc trouver ces étapes intermédiaires (les petit pas).
La réduction se fait par ces étapes :

$$\begin{array}{rll} ((x\dot{+}(\dot{-}y))\dot{+}\dot{2},\rho) & \to_{pp} & ((3\dot{+}(\dot{-}y))\dot{+}\dot{2},\rho) \\ & \to_{pp} & ((\dot{3}\dot{+}(\dot{-}\dot{2}))\dot{+}\dot{2},\rho) \\ & \to_{pp} & ((\dot{3}\dot{+}\dot{\widehat{-2}})\dot{+}\dot{2},\rho) \\ & \to_{pp} & (\dot{1}\dot{+}\dot{2},\rho) \\ & \to_{pp} & (\dot{3},\rho) \end{array}$$

Il faut bien évidemment vérifier que chaque étape suit bien les règles données par la sémantique à petit pas.
2. On admettra dans la suite que chaque variable a une valeur dans l'environnement ρ. Le théorème de progrès pour cette sémantique est "Les seules configurations ne possédant pas de successeur sont de la forme $(\dot{n},\rho)$".

On le prouve par induction sur la profondeur p des expressions.
On pose $p(\dot{n}) = p(x) = 0$, $p(\dot{-}e) = 1 + p(e)$ et $p(e_1 \dot{+} e_2) = 1 + \max(p(e_1), p(e_2))$.

Initialisation :
Soit une expression de profondeur 0.
Elle est soit de la forme $\dot{n}$, et trivialement ne se réduit pas quel que soit l'environnement ; ou de la forme x, et se réduira en $\widehat{\dot{\rho(x)}}$

Hérédité :
Soit $n \geq 0$. On suppose que pour toute expression de profondeur inférieure ou égale à n, elle est irréductible si et seulement si elle est de la forme $\dot{m}$.
Soit une expression de profondeur $n+1$. Elle est soit de la forme $e_1 \dot{+} e_2$, avec $p(e_i) \leq n$, ou de la forme $\dot{-}e$, avec $p(e) = n$.

Cas 1 : $e_1 \dot{+} e_2$
Par hypothèse d'induction, les e_i sont soit des entiers, soit réductibles. On peut appliquer notre choix des règles de $+$ pour réduire la somme.

Cas 2 : $\dot{-}e$
On fait de même ici. Si $(e, \rho) \to_{pp} (e', \rho)$, alors on applique la règle $(-)$. Si $e = \dot{m}$, on applique la règle $(-_{\text{fin}})$

Par conséquent, toutes les expressions de profondeur $n+1$ sont réductibles !

3. Le théorème de déterminisme n'a pas besoin à être adapté par rapport à l'encadré. On le prouve également par induction.

4. Ici le théorème de correction s'énoncera "Si $[\![e]\!]\rho = n$, alors il existe une dérivation $(e, \rho) \to^*_{pp} (\dot{n}, \rho)$".
On le prouve encore et toujours par induction.

5. Dans l'encadré, on a un énoncé pour l'adéquation entre la sémantique à petits pas et la sémantique à grands pas. Il faut donc l'adapter en cet énoncé : "S'il existe une dérivation $(e, \rho) \to^*_{pp} (\dot{n}, \rho)$, alors $[\![e]\!]\rho = n$"
On peut cette fois le prouver sans avoir à recourir à l'induction.
Soit (e, ρ) une configuration. Par déterminisme et progrès, on sait qu'il existe un unique n tel que $(e, \rho) \to^*_{pp} (\dot{n}, \rho)$. On ne peut pas avoir $[\![e]\!]\rho = m \neq n$, car sinon, on violerait le théorème de correction !

Ouverture : le λ-calcul

Le λ-calcul en appel par nom

On définit la syntaxe du λ-calcul comme suit :

$$M, N ::= \; x \;\mid\; \lambda x.M \;\mid\; MN$$

Et on introduit la sémantique opérationnelle suivante :

$$\frac{}{(\lambda x.M)N \to M[N/x]}\;(\beta) \qquad \frac{M \to M'}{MN \to M'N}$$

Exercice 3 :
(Prise en main)

1. Comment se réduit le terme $(\lambda x.x)(\lambda y.y)$?
2. Observer qu'il peut y avoir des soucis avec le renommage : comment se réduit le terme $(\lambda y.(\lambda x.xy))x$? L'astuce est d'observer que les variables liées peuvent être renommées (on appelle cela α-renommage). Par exemple, $\lambda z.xzt$ est le même terme que $\lambda y.xyt$.
3. Comment se réduit le terme $(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$?

Solution :

1. $(\lambda x.x)(\lambda y.y)$ se réduit en une étape (β) en $x[(\lambda y.y)/x] = \lambda y.y$.

2. $(\lambda y.(\lambda x.xy)) \to \lambda z.zx$.
Pour bien opérer la réduction, il faut renommer la variable x dans $(\lambda x.xy)$ avant de réécrire !

3. Ce terme se réécrit en lui-même. Cela nous montre que la réduction du λ-calcul ne finit pas forcément ! Ce problème est résolu par l'introduction du typage, que vous verrez plus tard.

Exercice 4 :

1. Énoncer puis prouver un théorème de progrès.
2. Énoncer puis prouver un théorème de déterminisme.

Solution :
TODO

Passons à des maths

Inf-demi-treillis complet

Un *inf-demi-treillis complet* est un ensemble ordonné $(X, \leq)$ non vide tel que toute famille $F \subseteq X$ a une borne inférieure $\bigwedge F$.

Exercice 5 :
(Treillis complets)

1. Montrer qu'un inf-demi-treillis complet est en fait un treillis complet.
2. Montrer que l'ensemble des parties d'un ensemble A quelconque est un treillis complet.
3. Justifier que l'ensemble des ouverts $\mathcal{O}$ d'un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est un treillis complet. Quel est le sup d'une famille F d'ouverts ? Quel est son inf ?

Solution :

1. Soit $(X, \leq)$ un inf-demi-treillis complet. Soit $F \subseteq X$. Nous devons donc montrer que F a une borne supérieure $\bigvee F$.

Soit $M = \{m \in X; \forall x \in F, m \geq x\}$ l'ensemble des majorants de F. On va montrer que $\bigwedge M$ convient.

Montrons d'abord que M est non vide, et $s = \bigwedge M$ est un majorant de F.
Par définition, $\bigwedge \emptyset \in M$. M est donc non vide.
Comme x est un minorant de M, et que s est le plus grand des minorants de M, on a trivialement $x \leq s$.
s est donc un majorant de F.

Par définition, s est aussi le plus petit des majorants de F, car c'est la borne inférieure de M.

Par conséquent, on a bien $\bigwedge M = \bigvee F$ et $(X, \leq)$ est bien un treillis complet.

2. Il suffit de prendre l'inclusion comme ordre, l'intersection et l'union comme sup et inf.

3. On peut trivialement prendre les mêmes

Knaster-Tarski

Soit $(X, \leq)$ un treillis complet et $f : X \to X$ une fonction monotone. Alors l'ensemble des points fixes de f est un treillis complet non vide.

Exercice 6 :
(Une preuve de Knaster-Tarski) Soit f une fonction monotone de X dans X où X est un treillis complet.

1. Montrez que f possède un plus grand et un plus petit point fixe.
2. En déduire que l'ensemble des points fixes est un treillis complet.

Solution :

1. On serait tentés d'itérer f sur $\perp$, mais ceci peut être en fait très délicat selon le cardinal de X. Nous allons utiliser une autre approche.

   Posons $Pre(f) = \{x \in X; f(x) \leq x\}$ les pré-points fixes, et $x_0 = \bigwedge Pre(f)$.
   En admettant que $Pre(f)$ n'est pas vide (exercice : pourquoi ?), soit $x \in Pre(f)$. $x_0 \leq x$, et par monotonicité de f, $f(x_0) \leq f(x)$.
   Donc, par définition de $Pre(f)$, $f(x_0) \leq x$.
   Par conséquent, $f(x_0)$ est également un minorant de $Pre(f)$. Comme x_0 est la borne inférieure de $Pre(f)$, on a $f(x_0) \leq x_0$.
   On applique à nouveau la monotonicité de f, et on trouve que $f(f(x_0)) \leq x_0$. Donc $f(x_0) \in Pre(f)$! Par conséquent, $x_0 \leq f(x_0)$
   On a donc prouvé que $f(x_0) \leq x_0 \leq f(x_0)$, donc $x_0 = f(x_0)$, et x_0 est un point fixe de f.

   Il faut maintenant montrer que x_0 est le plus petit des points fixes de f. C'est trivial parce que tout point fixe est un pré-point fixe.

On procède de manière duale pour le plus grand point fixe.

2. TODO

Exercice 7 :

(Utilisation de Knaster-Tarski) Démontrer le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein : si A et B sont deux ensembles tels qu'il existe deux injections f et g respectivement de A dans B et de B dans A, alors A est en bijection avec B. *Indication : faire un dessin avec deux patates, tout serait si beau si on pouvait trouver X tel que $f(X)^c$....*

Solution :

Soit $X \subseteq A$. On pose $h(a) = \begin{cases} f(a) \text{ si } a \in X \\ g^{-1}(a) \text{ sinon} \end{cases}$. On va essayer de trouver un X tel que h forme une bijection.
Si X vérifie $g(f(X)^c) = X^c$, alors h sera une bijection. (TODO : expliciter)

Or, la fonction $P \mapsto g(f(P^c)^c)$ est monotone pour les parties de A (TODO : prouver). On peut donc utiliser le théorème de Knarster-Tarski pour trouver le X qui nous convient, et faire de h une bijection.

Rappel sur les familles dirigées

Une famille D d'un ensemble $(X, \leq)$ est dirigée si et seulement si

1. D est non vide ;
2. pour tout $(x, y) \in D$, il existe $z \in D$, tel que $z \geq x$ et $z \geq y$.

Rappels sur les dcpos

Un dcpo est un ensemble partiellement ordonné $(X, \leq)$ tel que toute famille dirigée possède un sup. Un dcpo est *pointé* s'il existe un élément minimal.

Exercice 8 :

(Qui est quoi ?) Dessiner les ensembles suivants et indiquer lesquels sont des dcpos, lesquels sont pointés, lesquels sont des treillis complets, le tout *en justifiant*.

1. $\mathbf{1} = \{\bot\}$.
2. $\mathbf{Bool}_\bot = \{0, 1, \bot\}$ avec $x < y$ si et seulement si $x = \bot$ et $y \neq \bot$.
3. $\mathbb{N}$ avec l'ordre usuel.
4. $\omega + 1$ avec l'ordre usuel.
5. $\mathbb{N}^2$ avec l'ordre produit.
6. $\{[x, y] \mid x, y \in I, x \leq y\}$ avec l'ordre $\supseteq$ où $I = [0, 1]$.
7. $\{[x, y] \mid x, y \in I \cap \mathbb{Q}, x \leq y\}$ avec l'ordre $\supseteq$ où $I = [0, 1]$.

Solution :

TODO : les ordres ne sont pas dessinés.

1. $\mathbf{1}$ est trivialement un treillis complet, un dcpo, et pointé.

2. $\mathbf{Bool}_\bot$ est clairement pointé ; c'est également un dcpo. Cependant, il n'est pas un treillis complet, car la famille $\{0, 1\}$ n'a pas de borne sup (mais comme elle n'est pas dirigée, ceci ne change pas le statut de dcpo).

3. $\mathbb{N}$ est clairement pointé. Cependant, considérons la famille $\mathbb{N}$. Elle est clairement dirigée, mais elle n'a pas de borne sup. Par conséquent, $\mathbb{N}$ n'est pas un treillis complet ou un dcpo.

4. On rappelle que $\omega + 1$ est $\mathbb{N}$ avec un élément $\top$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n < \top$. Ici, toute famille est trivialement dirigée, et possède un sup. C'est donc à la fois un treillis complet (car trouver la borne inférieure est trivial) et un dcpo.

5. Par le même argument que pour $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^2$ n'est ni un dcpo ni un treillis complet (observer la famille $\{(n, 0), n \in \mathbb{N}\}$). On a cependant toujours un objet minimal : $(0, 0)$.

6. Prenons la famille $\{[a, a], [b, b]\}$ avec $a \neq b$. La seule borne supérieure possible est $\emptyset$, en tant que seul ensemble contenu à la fois dans $[a, a] = \{a\}$ et $[b, b]$. Or, $\emptyset$ n'est pas de la forme $[x, y]$, avec $x \leq y$. Cet ensemble ne peut donc pas être un treillis complet.
   Soit maintenant une famille dirigée F. Montrons qu'elle a un sup.
   Comme F est dirigée, pour tout $[x_1, y_1], [x_2, y_2] \in F$, il existe $[x_3, y_3] \in F$ tel que $[x_3, y_3] \subseteq [x_1, y_1]$ et $[x_3, y_3] \supseteq [x_2, y_2]$. Cela signifie donc que pour toute paire d'intervalles de F, leur intersection est non vide, et présente dans F.
   On peut donc trouver la borne sup en faisant l'intersection de tous les membres de F, qui est non vide.

   L'ensemble est aussi trivialement pointé, I contient tous ses segments, et est un segment de I, et est donc l'élément le plus petit.

7. L'ensemble reste pointé. Cependant, une famille dirigée peut ne pas avoir de sup. Par exemple, si $\ell \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$, et $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de rationnels convergeant vers ℓ, on peut montrer que $\{[0, x_i]\}_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille dirigée dont le sup serait $[0, \ell]$, qui n'est pas présent dans notre ensemble.

Exercice 9 :

Étant donné deux ensembles A, B, on note $P(A, B)$ l'ensemble des injections partielles de A dans B. À chaque $f \in P(A, B)$, on associe sa *restriction* $\overline{f} \in P(A, A)$, telle que :

- Si f est définie sur $x \in A$, alors $\overline{f}(x) = x$,
- Sinon, $\overline{f}$ n'est pas définie sur x.

Soient $f, g \in P(A, B)$, on note $f \leq g$ si $f = g \circ \overline{f}$.

1. Montrer que pour tous A, B, $\leq$ est un ordre sur $P(A, B)$.
2. $P(\{0, 1\}, \{0, 1\})$ est-il un dcpo ? Est-il pointé ? Est-ce un treillis complet ?
3. Qu'en est-il de $P(A, B)$ en général ?

Solution :

1. Soit A, B deux ensembles.

   Reflexivité :
   Soit $f \in P(A, B)$. Montrons que $f \leq f$.
   On ne peut avoir $f \neq f \circ \bar{f}$ seulement si il y a un x tel que $f(x)$ soit défini, mais $\bar{f}(x)$ ne le soit pas. C'est impossible par définition. On a donc $f \leq f$ pour tout $f \in P(A, B)$.

   Antisymétrie :
   Soit $f, g \in P(A, B)$ tels que $f \leq g$ et $g \leq f$.
   Soit $x \in A$. On va montrer que $f(x)$ est défini si et seulement si $g(x)$ est défini, et que dans ce cas, $f(x) = g(x)$.
   Si $f(x)$ est défini, comme $f = g \circ \bar{f}$, alors $g(x)$ est défini et $f(x) = g(x)$.
   Si $g(x)$ est défini, comme $g = f \circ \bar{g}$, alors $f(x)$ est défini et $g(x) = f(x)$.
   C'est assez pour conclure que $f = g$. La relation $\leq$ est donc bien antisymétrique.

   Transitivité :
   Soit $f, g, h \in P(A, B)$ tels que $f \leq g$ et $g \leq h$. Montrons que $f \leq h$.
   On a $f = g \circ \bar{f}$ et $g = h \circ \bar{g}$.
   Donc, $f = h \circ \bar{g} \circ \bar{f}$.
   Nous allons donc montrer que $\bar{g} \circ \bar{f} = \bar{f}$, c'est à dire que si $g(x)$ est défini, alors $f(x)$ est défini.
   Or, on a $g = g \circ \bar{f}$. Par conséquent, $g(x)$ ne peut être défini que si $\bar{f}$ est défini.
   On a donc $f = h \circ \bar{f}$, et $f \leq h$.

   On a donc montré que $\leq$ est bien un ordre sur $P(A, B)$!

2. On pourrait se lancer dans une preuve générale, mais on peut également représenter graphiquement $(P\{0, 1\}, \{0, 1\}, \leq)$.

   TODO : ordre.

   Ceci nous permet de voir directement que l'ordre est pointé, que toutes les familles dirigées ont bien un sup, mais que toute famille n'as pas forcément de sup.

3. On a montré que $(P(A, B), \leq)$ n'est pas forcément un treillis complet. On va montrer que c'est néanmoins un dcpo. On va par ailleurs admettre que A et B ne sont pas vides, pour ne pas avoir à trop écrire.

Soit D une famille dirigée de $P(A, B)$.

On va commencer par montrer que pour tout $x \in A$, s'il existe $f \in D$ tel que $f(x)$ est défini, alors, pour tout $g \in D$, si $g(x)$ est défini, alors $f(x)$.
Soit donc $x \in A$, et $f, g \in D$ tel que $f(x)$ et $g(x)$ sont définis.
Comme D est dirigée, il existe $h \in D$ tel que $f \leq h$ et $g \leq h$.
Par définition, $f(x) = h(x)$ et $g(x) = h(x)$, donc on a $f(x) = g(x)$.

On peut donc construire s_D, une fonction partielle de A dans B. $s_D(x) = f(x)$ s'il existe $f \in D$ telle que $f(x)$ est défini. Sinon, $s_D(x)$ n'est pas défini.

Il faut maintenant montrer que s_D est une injection.
Soient $x \neq y \in A$ (on admet que A a deux ou plus éléments. Dans le cas contraire, c'est trivial.) tels que $s_D(x)$ et $s_D(y)$ sont définis. Montrons que $s_D(x) \neq s_D(y)$.
Il existe donc $f, g \in D$ tels que $f(x) = s_D(x)$ et $g(y) = s_D(y)$.
Comme D est dirigée, il existe $h \in D$ qui majore f et g.
En particulier, $f(x) = h(x)$ et $g(y) = h(y)$. Comme h est par définition une injection partielle, on a donc $s_D(x) = h(x) \neq h(y) = s_D(y)$.
On a donc montré que s_D est une injection partielle, et majore D !

Il nous reste plus qu'à montrer que s_D est le plus petit des majorants de D. Soit donc $t \in P(A, B)$ tel que t majore D.
On cherche à montrer $s_D \leq t$, c'est à dire $s_D = t \circ \bar{s_D}$.
Soit $x \in A$. Si $s_D(x)$ n'est pas défini, trivialement $t \circ \bar{s_D}$ n'est pas défini non plus. Admettons donc que $s_D(x)$ est défini.
Par définition, il existe $f \in D$ tel que $f(x)$ est défini, et $s_D(x) = f(x)$.
Comme $f \leq t$, on a en particulier $f(x) = t(x) = s_D(x)$.
Donc, $s_D \leq t$, pour tout t majorant de D.
On a bien construite une borne supérieure pour toute famille dirigée de $P(A, B)$, il est donc un dcpo.

$(P(A, B), \leq)$ est toujours pointé : la fonction entièrement indéfinie fait office d'élément minimal.