TD 01 : Définitions inductives, notion de langage

Nicolas Margulies nicolas.margulies@lmf.cnrs.fr
Théo Vignon theo.vignon@lmf.cnrs.fr

1 Définitions inductives

1. Définissez *inductivement* les listes d'éléments de A comme un sous-ensemble de $\sum_f^*$ pour $\sum_f = A \cup \{::, \mathsf{nil}\}$
2. Définissez *inductivement* l'ensemble de parenthésages bien formés (appelé langage de Dyck) comme un sous-ensemble de $\sum_d^*$ où $\sum_d = \{(,)\}$

2 Parlons propositions

Soit $\mathcal{L}$ un langage à sortes $\mathcal{S} \cup \{\mathsf{Prop}\}$ contenant des symboles $\Rightarrow, \forall, \exists, \wedge, \neg$ (où $\exists$ représente la quantification existentielle, $\wedge$ la conjonction et $\neg$ la négation).

Donnez les arités de ces symboles.

Dans la suite, tous les langages étudiés contiennent implicitement les symboles précédents avec les arités de l'exercice.

3 Parlons prédicats

Soit $\mathcal{L}$ le langage à sortes $\{\mathsf{Term}, \mathsf{Prop}\}$ formé des symboles

— $\mathbb{C}, \mathbb{N}, \mathbb{R}, i, 0, 1, \times, =, \in$

— $\Rightarrow, \forall, \exists, \wedge, \neg$

— Quelles sont les arités des symboles

— Parmi les proposition suivantes lesquelles sont valides ?

$$\forall x \in \mathbb{N}, x = 0. \qquad \mathbb{C} = \mathbb{N} \qquad 0 = \mathbb{N} \qquad \mathbb{C} = \{x + iy \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$

$$(\exists x. x \in \mathbb{R} \Rightarrow \neg(x = 0)) = (\exists y. y \in \mathbb{R} \Rightarrow \neg(y = 0)) \qquad \exists \mathbb{R}. \mathbb{R} \in \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{R} = 0.$$

— Écrire la proposition

"Tout entier naturel est un nombre complexe"

— Écrire la proposition

"Tout complexe non nul a un inverse"

— Écrire la proposition

"Le seul entier naturel à avoir un inverse est 1"

$$\frac{\forall x.A}{(t/x)A} \qquad \frac{A \quad B}{A \wedge B} \qquad \frac{A \Rightarrow B \quad A}{B} \qquad \frac{}{\forall x.(x \leq S(x))} \qquad \frac{}{\forall x.\forall y.\forall z.(x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z}$$

FIGURE 1 – Règles

4 Démonstration : Hilbert

Soit $\mathcal{L}$ le langage à sortes $\{\mathsf{Term}, \mathsf{Prop}\}$ formé des symboles de fonction 0 d'arité $\langle\mathsf{Term}\rangle$, S d'arité $\langle\mathsf{Term}, \mathsf{Term}\rangle$ et du symbole de prédicat $\leq$ d'arité $\langle\mathsf{Term}, \mathsf{Term}, \mathsf{Prop}\rangle$. Les règles définissant l'ensemble des propositions démontrables sont représentées sur la figure 1. La notation $(t/x)A$ représente la *subtitution* de la variable x par le terme t dans la formule A.

Par exemple, si R est un symbole d'arité $\langle\mathsf{Term}, \mathsf{Term}, \mathsf{Term}\rangle$, $(t/x)R(x, y) = R(t, y)$. Vous verrez la définition précise au prochain cours, pour l'instant votre intuition devrait suffire.

Montrer que les propostions :

1. $0 \leq S(0)$
2. $0 \leq S(S(0))$

sont démontrables.

5 Constructions Ensemblistes

On se place dans le langage de la théorie des ensembles. Il y a donc deux sortes $\{\mathsf{Set}, \mathsf{Prop}\}$ et les symboles suivants :

— $\emptyset, \times, \cup, \cap, \mathcal{P}$
— $=, \in, \forall, \exists, \wedge, \vee, \neg, \Rightarrow$
— Le schéma de compréhension $\{x \in A \mid P(x)\}$ pour tous A et P

1. Donnez les sortes des différents symboles
2. Définissez un symbole $\exists!$ (*Il existe un unique*)
3. Définissez l'ensemble des fonction B^A pour A et B des ensembles
4. Définissez l'ensemble des fonctions injectives de A vers B.
5. Définissez l'ensemble des fonctions surjectives de A vers B.
6. Définissez des notions d'injectivité et de surjectivité pour des relations. Avec ce nouveau vocabulaire, qu'est-ce qu'une fonction ?
7. Énoncez une proposition qui dit qu'il existe un ensemble infini. On nome cet ensemble ω
8. Définissez l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.