Logique 2023-2024

Département Informatique, ENS Paris Saclay

TD 11 : Résolution

Nicolas Margulies nicolas.margulies@lmf.cnrs.fr
Théo Vignon theo.vignon@lmf.cnrs.fr

1 Fonction injective/surjective

Le but de l'exercice est de montrer que toute fonction injective sur un ensemble de deux éléments ou moins est surjective en utilisant la résolution. Pour cela considérons la signature suivante : $\mathcal{P} = \{ = (2) \}$, $\mathcal{F} = \{ a(0),\ b(0),\ f(1) \}$. Nous allons donc étudier le séquent suivant : $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \vdash B$, avec

$$\begin{array}{rcl}
A_1 & = & \forall x.\ \forall y.\ (x = y \Rightarrow y = x) \\
A_2 & = & \forall x.\ \forall y.\ \forall z.\ [(x = y \wedge y = z) \Rightarrow x = z] \\
A_3 & = & \forall x.\ \forall y.\ (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y) \\
A_4 & = & \forall x.(x = a \vee x = b) \\
B & = & \forall y.\ \exists x.\ (f(x) = y)
\end{array}$$

1. Calculez les formes clausales $C_1, \ldots, C_4, C$ des formules $A_1, \ldots, A_4, \neg B$.
   Dans la suite,on utilise le symbole c pour le symbole introduit par l'étape de skolémisation par la procedure sur la formule $\neg B$.
2. Dérivez $C_5 = \neg(f(x) = y) \vee \neg(c = y)$ des clauses C_1, C_2, C.
3. Dérivez $C_6 = \neg(f(f(x)) = y) \vee \neg(f(c) = y)$ des clauses C_1, C_2, C_3, C.
4. Dérivez $C_7 = \neg(f(x) = a) \vee \neg(f(y) = b)$ des clauses C_4, C_5.
5. Dérivez $C_8 = \neg(f(c) = b)$.
6. Dérivez $C_9 = f(c) = b$.
7. Montrez que $\perp$ est dérivable. Concluez en utilisant la correction de la résolution.

2 Résolution Alternative

Soit T un ensemble de clauses.

Considèrez le système de règles alternatives R_0 :

$$\frac{P \vee C \qquad \neg P \vee C'}{C \vee C'}\ \text{IdRes} \qquad \frac{L \vee L \vee C}{L \vee C}\ \text{IdFact} \qquad \frac{C}{C\{x \to t\}}\ \text{Subst}$$

Prouvez le résultat suivant : Si T' est un ensemble de copies de clauses de T et θ une substitution tel que :

— Il n'y a pas de variables libres qui sont dans deux clauses différentes de T'

— $\perp$ est dérivable depuis $\theta T'$ dans le système R_0,

Alors $\perp$ est dérivable depuis T dans R.

3 Programmation logique

Soit $\mathcal{F}, \mathcal{P}$ une signature. On dit que une fonction $h : T(\mathcal{F})^n \longrightarrow T(\mathcal{F})$ est calculable par résolution si il existe un ensemble de clauses C utilisant des symboles de fonction dans $\mathcal{F}$ et de symboles de prédicats dans $\mathcal{P} \sqcup \{H(n+1)\}$ tel que pour tout n-uplet de termes clos $t_1, \ldots, t_n$ et tout terme clos u construit à partir de la signature $\mathcal{F}$, $R(u)$ est dérivable depuis $C \cup \{\neg H(t_1, \ldots, t_n, x) \vee R(x)\}$, si et seulement si, $u = h(t_1, \ldots, t_n)$ (R est un symbole de predicat frais, c'est-à-dire pas dans $\mathcal{P} \sqcup \{H(n+1)\}$).

1. On travaille sur la signature $\mathcal{F} = \{\ 0(0)\,,\, S(1)\ \}$ et $\mathcal{P} = \emptyset$. On considère le symbole de prédicat $H = Add(3)$ et l'ensemble de clauses C :

$$\begin{array}{l} Add(0, x, x) \\ \neg Add(x, y, z) \quad \vee \quad Add(S(x), y, S(z)) \end{array}$$

   (a) Montrez que $R(S(S(0)))$ est dérivable à partir de l'ensemble de clauses C et la clause $\neg Add(S(0), S(0), x) \vee R(x)$.

   (b) On écrit $S^n(0)$ pour le terme clos $S(\ldots(S(0))\ldots)$ avec n symboles S. Montrez que l'addition est calculable par résolution en utilisant les clause précédentes, où l'addition est définie sur les termes clos de $\mathcal{F}$ comme $Add(S^n(0), S^m(0)) = S^{n+m}(0)$.

2. A partir de la signature $\mathcal{F} = \{\ 0(0)\,,\, S(1)\ \}$ et $\mathcal{P} = \{\ Add(3)\ \}$, Donnez l'ensemble des clauses calculant la multiplication deux nombres secrets, où la multiplication sur les termes clos est définie par by $mul(S^n(0), S^m(0)) = S^{n\times m}(0)$.

3. Montrez que la concatenation de listes et le retournement de liste sont calculable par résolution : Donnez la signature et les ensemble de clauses associés.

Il y a beaucoup d'autres exemples : les connecteurs booléens classique, le minimum et le maximum de nombres entier, la fonction $n \mapsto 2^n$...