Logique 2023-2024

Département Informatique, ENS Paris Saclay

TD 04 : Théories

Nicolas Margulies nicolas.margulies@lmf.cnrs.fr
Théo Vignon theo.vignon@lmf.cnrs.fr

1 Échauffement : définitions de l'incohérence

1. Prouvez que les définitions suivantes de l'*incohérence* d'une théorie $\mathcal{T}$ sont équivalentes :
   (a) Il existe une formule A telle que A et $\neg A$ sont prouvables dans $\mathcal{T}$.
   (b) $\perp$ est prouvable dans $\mathcal{T}$.
   (c) Toute formule est prouvable dans $\mathcal{T}$.
2. Montrez que si $\mathcal{T}$ est incohérente, alors il existe une théorie incohérente finie $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ telle que $\mathcal{T}'$ est finie.
3. Est-ce qu'une théorie incohérente est complète ? décidable ?

2 Égalité

Soit $\mathcal{L}_\mathcal{E}$ le langage avec une sorte s des termes, un ensemble $\mathcal{F}$ de symboles de fonctions et un ensemble $\mathcal{P}$ de symboles de prédicats contenant un prédicat binaire $=: \langle s, s, \mathrm{Prop}\rangle$. La théorie de l'égalité $\mathcal{E}$ peut alors être exprimée comme l'ensemble de formules suivant :

$$\begin{cases} \forall x\ (x = x) & \\ \forall x_1 \dots \forall x_i \forall x'_i \dots \forall x_n & (x_i = x'_i \Rightarrow \\ & f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_n)) \\ \forall x_1 \dots \forall x_j \forall x'_j \dots \forall x_m & (x_j = x'_j \Rightarrow \\ & P(x_1, \dots, x_j, \dots, x_m) \Rightarrow P(x_1, \dots, x'_j, \dots, x_m)) \end{cases}$$

Pour tout symbole de fonction $f \in \mathcal{F}$ et prédicat $p \in \mathcal{P}$.

Écrivez les formules exprimant la symétrie et la transitivité de l'égalité, et montrez qu'elles sont prouvables dans cette théorie.

Dans les exercices suivants, on utilisera l'égalité, et on pourra prendre de manière équivalente les axiomes ci-dessus ou le schéma d'axiome de substitutivité $\overline{\forall}\forall x\ y,\ (x = y \Rightarrow (x/z)A \Rightarrow (y/z)A)$ où z est libre dans A.

3 Arithmétique de Peano

On travaille sur le langage $\mathcal{L}_{\mathsf{PA}}$ contenant une sorte nat, des symboles de fonctions 0 d'arité $\langle nat\rangle$, S d'arité $\langle nat, nat\rangle$, + et $\times$ d'arité $\langle nat, nat, nat\rangle$ (et l'égalité).

Les axiomes de PA sont les axiomes de l'égalité et :

$$\begin{aligned}
\forall x &\quad 0 + x = x && (1)\\
\forall x \forall y &\quad S(x) + y = S(x + y) && (2)\\
\forall x &\quad 0 \times x = 0 && (3)\\
\forall x \forall y &\quad S(x) \times y = (x \times y) + y && (4)\\
\forall x \exists y &\quad x = 0 \vee x = S(y) && (5)\\
\forall x &\quad \neg S(x) = 0 && (6)\\
\forall x \forall y &\quad S(x) = S(y) \Rightarrow x = y && (7)
\end{aligned}$$

Schéma de récurrence (pour toute formule A dont les variables libres sont incluses dans $x, x_1, \ldots, x_n$) :

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n (0/x)A \Rightarrow \forall y.\ ((y/x)A \Rightarrow (S(y)/x)A) \Rightarrow \forall y.\ (y/x)A$$

1. Prouvez que l'axiome (5) est superflu
2. Prouvez dans PA :
   (a) $\forall x.\ x + 0 = x$
   (b) $\forall x\ y.\ (x + S(y)) = S(x + y)$
   (c) $\forall x\ y.\ (x + y) = (y + x)$
3. Définissez des formules représentant $x \leq y$ et $x < y$.
4. Exprimez dans PA que $\leq$ est une relation d'ordre. Prouvez-le.
5. Prouvez dans PA :
   (a) $\forall x.\ (x \leq 0 \Rightarrow x = 0)$
   (b) $\forall x\ y.\ (y \leq S(x) \Rightarrow y \leq x \vee y = S(x))$
   (c) $\forall x\ y.\ (x \leq y \vee y \leq x)$
6. Prouvez le schéma de récurrence forte, c'est-à-dire pour toute formule A avec pour variables libres $z, x_1, \ldots, x_n$:

   $$\forall x_1 \ldots x_n.\ (0/z)A \Rightarrow \forall x.\ (\forall y.\ (y \leq x \Rightarrow (y/z)A) \Rightarrow (S(x)/z)A) \Rightarrow \forall y.\ (y/z)A$$

7. ($\star$) Prouvez que tout ensemble non-vide d'entiers naturels définissable par une formule du permier ordre a un élément minimal, i.e. pour toute formule A avec une variable libre x :

   $$\mathsf{PA} \vdash \exists x.\ A \Rightarrow \exists x.\ (A \wedge \forall y.\ (y < x \Rightarrow \neg(y/x)A))$$

   Vous pourrez utiliser librement le fait que

   $$\neg\exists x.\ (A \wedge \forall y.\ (y < x \Rightarrow \neg(y/x)A)) \neg\forall x.\ (A \Rightarrow \exists y.\ (y < x \wedge (y/x)A))$$

4 Théorie des ensembles

Dans la suite, on définit le langage $\mathcal{L}_{\mathsf{ZF}}$ composé d'une sorte ι, et du symbole $\in$ d'arité $\langle \iota, \iota, \mathrm{Prop}\rangle$. Vous pouvez utiliser les notations $\cup$ et $\mathcal{P}$ pour l'union et l'ensemble des parties.

4.1 La théorie Z

La théorie Z est composée des axiomes de l'égalité et des suivants :

Extensionalité : $\forall x \forall y\ ((\forall z\ (z \in x \Leftrightarrow z \in y)) \Rightarrow x = y)$

Union : $\forall x \exists z \forall w\ (w \in z \Leftrightarrow (\exists v\ (w \in v \wedge v \in x)))$

Paire : $\forall x \forall y \exists z \forall w\ (w \in z \Leftrightarrow (w = x \vee w = y))$

Ensemble des parties : $\forall x \exists z \forall w\ (w \in z \Leftrightarrow (\forall v\ (v \in w \Rightarrow v \in x)))$

Shéma de compréhension restreint : $\forall x_1 \dots \forall x_n \forall v \exists w \forall x\ (x \in w \Leftrightarrow x \in v \wedge A)$
pour toute proposition A de variables libres $x, x_1, \dots, x_n$. L'ensemble w sera noté $\{\ x \in v\ :\ A\ \}$.

Axiome de l'infini : On définira $\emptyset$ dans une question ultérieure. On définit la formule suivante : $Succ[x, y] = \forall z.\ (z \in y \Leftrightarrow (z \in x \vee z = y))$. L'axiome de l'infini est alors :

$$\exists I.\ (\emptyset \in I) \wedge \forall x \forall y.\ ((x \in I \wedge Succ[x, y]) \Rightarrow y \in I)$$

1. Définissez une proposition $P[x, y]$ représentant l'inclusion, i.e. $x \subseteq y$ ssi $P[x, y]$ est prouvable. Réécrivez l'axiome de l'**Ensemble des parties** avec cette notation.
2. Montrez qu'il existe un unique ensemble $\emptyset$ ne contenant aucun élément.
3. Énoncez le théorème « Pour tout élément x, il existe un ensemble ne contenant que x ». Quels axiomes de Z utiliseriez-vous pour le prouver ?
4. Énoncez le théorème « L'union de deux ensembles est un ensemble ». Quels axiomes de Z utiliseriez-vous pour le prouver ?
5. Énoncez le théorème « L'intersection de deux ensembles est un ensemble ». Quels axiomes de Z utiliseriez-vous pour le prouver ?
6. Montrez que l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas, c'est-à-dire montrez que $\neg \exists x \forall y.\ (y \in x)$ est prouvable dans Z.

4.2 La théorie ZF

On définit la théorie ZF en remplacant le schéma de compréhension restreinte dans Z par le **Schéma de remplacement** :

$$\forall x_1 \dots x_n\ x\ y\ y'.\ (F[x, y] \wedge F[x, y'] \Rightarrow y = y') \Rightarrow \exists b \forall y.\ (y \in B \Leftrightarrow \exists a.\ (x \in A \wedge F[x, y]))$$

où F a pour variables libres $x, y, x_1, \dots, x_n$.

1. Montrez que pour toute formule F, Z $\vdash F$ implique ZF $\vdash F$, i.e. que l'on peut prouver n'importe quelle instance du **Schéma de compréhension restreint** en utilisant le **Schéma de remplacement**.
2. ($\star$) On note (a, b) l'ensemble $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Prouvez que cette construction satisfait les propriétés des couples :
$$\text{ZF} \vdash \forall a\ a'\ b\ b'.\ (a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a' \wedge b = b'$$
3. ($\star$) Prouvez que pour tous ensembles a et b, leur produit cartésien $a \times b$ existe, c'est-à-dire :
$$\text{ZF} \vdash \forall a\ b \exists x \forall z.\ z \in c \Leftrightarrow \exists x\ y.\ x \in a \wedge y \in b \wedge z = (x, y)$$
4. Comment pourrait-on définir les fonctions ?

4.3 Entiers de Von Neumann

Les entiers de Von Neumann sont définis par $0 = \emptyset, 1 = \{0\}, 2 = \{0, 1\}, 3 = \{0, 1, 2\}$, ect.

1. Écrivez une proposition N avec une variable libre x utilisant uniquement = et $\in$ exprimant le fait que x est un entier naturel.

On écrit $N[t]$ la proposition $(t/x)N$. On observe que tous les entiers naturels appartiennent à l'ensemble I défini par l'axiome de l'infini.

2. Prouvez la proposition $\exists \mathbb{N}. (x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow N[x])$ dans ZF.
3. Écrivez une proposition exprimant le principe d'induction : si un ensemble contient 0 et est clos par successeur, il contient tous les entiers. Montrez que ceci est prouvable dans ZF.
4. Définissez l'addition et la multiplication par leurs graphes. Montrez que les axiomes de l'arithmétique de Peano sont prouvables dans ZF.

5 Diverses théories

1. Donnez des ensembles de fonctions et de prédicat, ainsi que des axiomes décrivant les théories suivantes.
   (a) Les relations d'équivalence
   (b) La théorie des groupes
   (c) La théorie des anneaux
2. Prouvez en théorie des groupes que l'inverse est unique.
3. Prouvez en théorie des groupes que si tous les éléments sont d'ordre 2, alors le groupe est abélien.
4. Prouvez que le zéro d'un anneau est absorbant pour la multiplication.
5. Quels axiomes devrait-on ajouter pour obtenir la théorie des anneaux intègres ? des corps ? Prouvez que les corps sont des anneaux intègres.