TD 08 : Élimination des coupures

Nicolas Margulies `nicolas.margulies@lmf.cnrs.fr`
Théo Vignon `theo.vignon@lmf.cnrs.fr`

Dans la suite, on écrira $\Gamma \vdash_{\mathrm{LK}} \Delta$, respectivement $\Gamma \vdash_{\mathrm{NK}} \varphi$ quand $\Gamma \vdash \Delta$ est démontrable en calcul des séquents, respectivement quand $\Gamma \vdash \varphi$ est démontrable en déduction naturelle.

1 LK avec coupures

On étudie le calcul des séquents avec coupures. Dans la suite, P, Q sont des symboles de prédicats unaires.

1. Démontrez la formule $\varphi_a = \exists x.(P(x) \Rightarrow \forall y.P(y))$ dans le calcul des séquents.
   Astuce : Faire une coupure sur $\forall x.P(x) \vee \exists x.\neg P(x)$.
2. Supprimez les coupures dans la preuve suivante. Détaillez les étapes.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \vdash \varphi, \psi}\,\mathrm{ax}}{\varphi \vdash \varphi \vee \psi}\,\vee_{\mathrm{R}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\varphi \vdash \psi, \varphi}\,\mathrm{ax} \qquad \dfrac{}{\psi \vdash \psi, \varphi}\,\mathrm{ax}}{\varphi \vee \psi \vdash \psi, \varphi}\,\vee_{\mathrm{L}}}{\varphi \vee \psi \vdash \psi \vee \varphi}\,\vee_{\mathrm{R}}}{\varphi \vdash \psi \vee \varphi}\,\mathrm{cut}$$

D'abord, un point rapide sur comment appliquer la procédure d'élimination des coupures.
Le but est de faire remontrer les coupures dans la preuve, ou de les remplacer par des coupures sur des formules plus petites. Cela jusqu'au moment où elles peuvent être remplacées par des règles structurelles (les contractions et la règle d'axiome). Il y a trois cas principaux, qui vont dépendre des premières règles des deux preuves au-dessus de la coupure :

a) Les deux règles sont appliquées à la formule introduite par la règle de coupure : On sépare la coupure en coupures sur des sous-formules de la formule initiale. (Voir les slides du cours pour plus de détails).

   Remarque : lorsque les deux règles sont des axiomes, il est possible de finir directement avec la règle d'axiome

b) L'une des règles n'est pas appliquée à la formule introduite par la coupure : On peut commuter la coupure avec cette règle.

   Remarque : si cette règle est la règle d'axiome, on peut également finir directement

c) L'une des règles est une règle d'axiome sur la formule introduite par la coupure : On peut remplacer la coupure par une règle d'axiome (si l'autre est également une règle d'axiome) ou une contraction.

3. Existe-t-il un terme t tel que $\vdash_{\mathrm{LK}} P(t) \Rightarrow \forall y.P(y)$?
4. Eliminez les coupures dans la preuve de la question 1 (Pas besoin de détailler la procédure cette fois-ci).

2 Propriété de sous-formule

1. Montrez que si $\Gamma \vdash_{\mathrm{LK}} \Delta$, alors il existe une preuve de $\Gamma \vdash \Delta$ où n'apparaissent que des formules de la forme $\varphi[t_1, \ldots, t_n]$, où φ est une sous-formule d'une formule dans $\Gamma \cup \Delta$ et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes (n'apparaissant pas nécessairement dans $\Gamma \cup \Delta$). Traitez au moins les règles structurelles, la disjonction et les quantificateurs.
2. On appelle LKP le fragment propositionnel du calcul des séquents. Il contient toutes les règles de LK, sauf celles concernant les quantificateurs.
   (a) Prouvez que si $\Gamma \vdash_{\mathrm{LK}} \Delta$ et $\Gamma \cup \Delta$ ne contiennent que des formules propositionnelles, alors il existe une preuve de $\Gamma \vdash \Delta$ dans LKP, en utilisant la propriété de sous-formule.
   (b) Montrez syntaxiquement que la démontrabilité dans LKP est décidable.

3 Équivalence entre LK et NK

1. En classe, vous avez esquissé la preuve que si $\Gamma \vdash_{\mathrm{LK}} \Delta$, alors $\Gamma, \neg\Delta \vdash_{\mathrm{NK}} \bot$ par récurrence. Écrivez les cas $\exists_i\mathrm{L}$, $\exists_{\mathrm{R}}$.
2. Vous avez aussi esquissé la preuve que si $\Gamma \vdash_{\mathrm{NK}} \varphi$, alors $\Gamma \vdash_{\mathrm{LK}} \varphi$. Écrivez les cas de RAA et $\Rightarrow_{\mathrm{E}}$.
3. Voici deux preuves en déduction naturelle.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg\neg\varphi, \varphi \vdash \neg\neg\neg\varphi}\,\mathsf{ax} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg\neg\varphi, \neg\varphi, \varphi \vdash \neg\varphi}\,\mathsf{ax} \qquad \dfrac{}{\neg\neg\neg\varphi, \neg\varphi, \varphi \vdash \varphi}\,\mathsf{ax}}{\neg\neg\neg\varphi, \neg\varphi, \varphi \vdash \bot}\,\neg_{\mathrm{E}}}{\neg\neg\neg\varphi, \varphi \vdash \neg\neg\varphi}\,\neg_{\mathrm{I}}}{\neg\neg\neg\varphi, \varphi \vdash \bot}\,\neg_{\mathrm{E}}}{\neg\neg\neg\varphi \vdash \neg\varphi}\,\neg_{\mathrm{I}}$$

(a) Première preuve

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi, \varphi, \neg\psi \vdash \varphi}\,\mathsf{ax} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi, \varphi, \neg\psi \vdash \neg\psi}\,\mathsf{ax} \qquad \dfrac{}{\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi, \varphi, \neg\psi \vdash \neg\psi \Rightarrow \neg\varphi}\,\mathsf{ax}}{\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi, \varphi, \neg\psi \vdash \neg\varphi}\,\Rightarrow_{\mathrm{E}}}{\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi, \varphi, \psi \vdash \bot}\,\neg_{\mathrm{E}}}{\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi, \varphi \vdash \neg\neg\varphi}\,\neg_{\mathrm{I}}}{\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi, \varphi \vdash \psi}\,\mathsf{RAA}}{\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi \vdash \varphi \Rightarrow \psi}\,\Rightarrow_{\mathrm{I}}$$

(b) Deuxième preuve

Transformez-les en preuves du calcul des séquents (utilisez des règles à gauche à la place des éliminations quand cela fonctionne, sinon utilisez la méthode vue en classe).

4. Transformez cette preuve en une preuve de la déduction naturelle (selon la procédure vue en classe).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\mathsf{ax}}{\vdash A, \neg A}\,\neg_{\mathrm{R}}}{\vdash A \vee \neg A}\,\vee_{\mathrm{R}}$$

5. Prouvez que si $\Gamma \vdash_{\mathrm{LK}} \varphi_1, \ldots, \varphi_n$, alors $\Gamma \vdash_{\mathrm{NK}} \varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n$.